Continuité sur un intervalle

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Étudier les solutions d'une équation de type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f sur un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

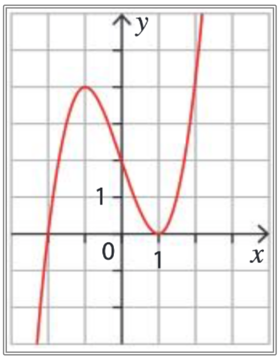
Le mathématicien du chapitre :

Bernard Bolzano (1781 – 1848) est un mathématicien né et mort à Prague. Fils d'une germanophone, il rédigea toutes ses œuvres en Allemand. Il a donné son nom à deux théorèmes en mathématiques : Le théorème de valeurs intermédiaires et le théorème de Bolzano-Weierstrass. La définition de la continuité étudiée en terminale a été donnée par Bolzano dans sa théorie des fonctions publiée en 1837.

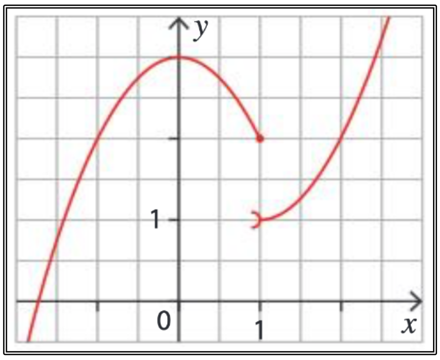
1) Continuité en un point

a) Approche graphique

Considérons dans chacun des cas suivants, la fonction numérique f de la variable réelle x, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



La fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$,est continue en tout point. Sa représentation graphique se trace d'un coup de crayon.



La fonction $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 \; si \; x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 \; si \; x > 1 \end{cases}$ n'est pas continue au point 1. La courbe présente un saut. Pour tracer la courbe, il faut lever le crayon.

b) Définition

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est continue en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarques :

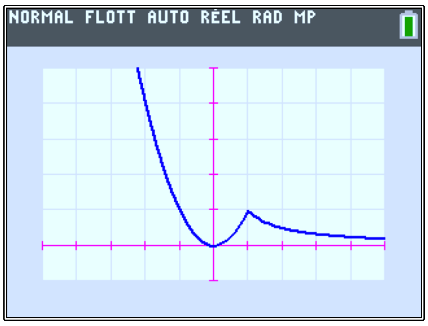
- Si f est définie en a, f peut être continue ou non en a. Si f n'est pas définie en a, la question de sa continuité en a ne se pose même pas : f ne peut être continue en a.
- Si f est définie en a, non continue en a, on dit aussi que f est discontinue en a.
- Une fonction peut présenter plusieurs points de discontinuité, voir même une infinité.
- La cédille ci-dessus signifie que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ mais on a $f(1) = 2$

Méthode :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est définie par morceaux sur I, pour étudier la continuité de f en une valeur a de raccordement de f avec $a \in I$, on calcule les limites à droite et à gauche de f en a:

• Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = f(a)$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et *f* est continue en a.
• Si l'une des deux limites (à droite ou à gauche) de *f* en a n'existe pas ou bien si ces deux limites sont différentes, *f* n'est pas continue en a.

Exemple 1 :



Soit *f* la fonction définie sur ℝ par :

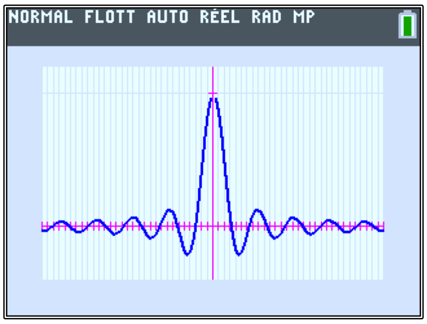
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \; si \; x > 1 \\ x^2 \; si \; x \leq 1 \end{cases}$$

A gauche de 1 : $f(1) = 1$

A droite de 1 : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \frac{1}{x} = 1$

Puisque la limite à droite est égale à la valeur à gauche, *f* est continue en 1.

Exemple 2 :



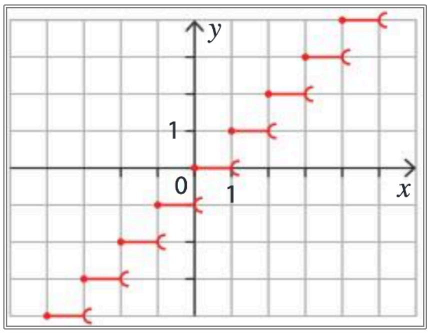
f est la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x} \; si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

A l'aide du nombre dérivé de la fonction sinus en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$. Ainsi, *f* est continue en 0

On appelle cela un prolongement par continuité.

Exemple 3 :



On a tracé la fonction partie entière, notée $\lfloor x \rfloor$.
La fonction partie entière est-elle continue en 2?
On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \lfloor x \rfloor = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x<-2}} \lfloor x \rfloor = -3$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \lfloor x \rfloor \neq \lim\limits_{\substack{x\to -2\\x<-2}} \lfloor x \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ est discontinue en 2
Plus généralement, la fonction $\lfloor x \rfloor$ est discontinue en toute valeur entière de *x*.

Remarque :

La fonction partie entière est le seul exemple de fonction usuelle discontinue en plusieurs points rencontrée en classe de Terminale. Elle est discontinue en une infinité de valeurs.

2) Continuité sur un intervalle

Définition :

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I*.
On dit que *f* est continue sur l'intervalle *I*, si *f* est continue en tout réel a de *I*.

Remarque :

Dire qu'une fonction *f* est continue sur un intervalle *I*, revient à dire que sa représentation graphique est traçable ***sans lever le crayon*** sur *I*.

3) Continuité et dérivabilité

Théorème :

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I*.
• Si *f* est dérivable en un réel a de *I*, alors *f* est continue en a.
• Si *f* est dérivable sur l'intervalle *I*, alors *f* est continue sur *I*.

Attention :

- ***Ne pas confondre continuité et dérivabilité :***

Une fonction f est continue en a si sa représentation graphique ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.
Une fonction f est dérivable en a si sa représentation graphique admet une tangente non verticale au point d'abscisse a.

- ***La réciproque de ce théorème est fausse :***

La fonction $x \mapsto |x|$ est le contre-exemple parfait.
Elle est continue en 0, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}|x| = 0$ tandis que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}|x| = 0$
Mais, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}|x|' = 1$ tandis que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}|x|' = -1$
Le coefficient directeur de la tangente à gauche de 0 est différent du coefficient directeur de la tangente à droite de 0, $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

4) Continuité des fonctions usuelles

On admettra les théorèmes généraux suivants :

Théorème1 :

Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et continues en tout réel a de I.
Alors :
- la fonction $u + v$ est continue en tout réel a de I.
- la fonction $u \times v$ est continue en tout réel a de I.
- Pour tout réel λ, la fonction λx est continue en tout réel a de I.
- les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont continues en tout réel a de I tel que $v(x) \neq 0$.

Théorème 2 :(composition de fonctions continues)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que, $\forall x \in I, u(x) \in J$.
Si u est continue sur I et v continue sur J, alors la fonction vou est continue sur I.

Continuité des fonctions usuelles :

Les résultats suivants sont admis.
- Toute fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Les fonctions $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple :

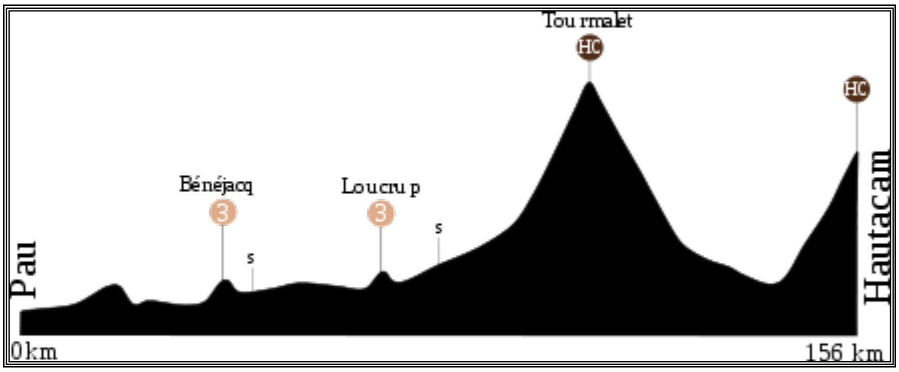
Les fonctions $x \mapsto sin(x)$ et $x \mapsto cos(x)$ sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, cos(x) \neq 0$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc la fonction $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est continue sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$., en tant que quotient de fonctions continues sur $\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$

5) Le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Exemple introductif :

Étape du tour de France : PAU – HAUTACAM en 2008

- Étape de 156 km.
- Ville de départ : PAU, altitude 200m
- Ville d'arrivée : HAUTACAM, altitude 1520m



Le profil de l'étape est une fonction définie sur l'intervalle $[0; 156]$ et à valeurs réelles.
À tout nombre x de $[0; 156]$ elle associe l'altitude du point situé à x kilomètres du départ.
Puisque les altitudes s'échelonnent au moins de 200 à 1520 m (certaines peuvent être inférieures à 200 m et d'autres supérieures à 1520 m), il paraît évident que les coureurs ont dû passer au moins une fois par toutes les altitudes intermédiaires.

Cependant, cette constatation s'appuie sur deux hypothèses :

- Le parcours est un intervalle, ce qui suppose que l'espace est un continuum, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de « trou » entre 0 et 156.
- La fonction altitude est continue, ce qui signifie qu'une variation infinitésimale du kilométrage entraîne une variation infinitésimale de l'altitude : en d'autres termes, un coureur ne peut pas se téléporter instantanément d'une altitude à une autre.

Le coureur passera ainsi au moins une fois par l'altitude 1 000 m.

Le ***théorème des valeurs intermédiaires*** formalise ce raisonnement empirique :

Il existe au moins un réel $c \in [0; 156]$ tel que : $f(c) = 1000$

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I avec $a < b$.
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit :

Pour tout k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $[a; b]$.

Contre-exemple :

L'hypothèse de continuité est ***indispensable*** dans le théorème.
f est la fonction partie entière définie ci-dessus. Avec : $a = 0$, $b = 1$ et $k = \frac{1}{2}$, on a alors $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pourtant, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ n'admet aucune solution sur $[0; 1]$

Exercice de cours

On désigne par *f* la fonction définie sur $[-4; 7]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		2		4		7
f	-11	$\nearrow$	3	$\searrow$	1,5	$\nearrow$	13

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur $[-4; 7]$:

Équations	$f(x) = 0$	$f(x) = 2$	$f(x) = 15$	$f(x) = -8$	$f(x) = 3$
Nombres de solutions	1	3	Aucune	1	2

Pour cela, il suffit de repérer l'endroit ou l'image peut se trouver.

6) Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I*. L'image par *f* de l'intervalle *I* est l'ensemble, noté $f(I)$, des images par *f* de tous les réels *x* de l'intervalle *I*.

> ***Propriété :***
>
> Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* de ℝ. Alors $f(I)$ est un intervalle de ℝ

Démonstration :

Soient $y_1 \in f(I)$, $y_2 \in f(I)$ (on suppose $y_1 < y_2$)et z un réel tel que $y_1 < z < y_2$. Il existe donc un réel x_1 de l'intervalle *I* tel que $f(x_1) = y_1$ et un réel x_2 de I tel que $f(x_2) = y_2$.
f est continue sur *I* et $f(x_1) < z < f(x_2)$. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel *c* compris entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = z$. *I* étant un intervalle de ℝ, alors $c \in I$ et donc $z \in f(I)$.
On a bien démontré que $f(I)$ est un intervalle de ℝ.

Attention :

L'hypothèse de continuité est encore indispensable dans cette propriété : si *f* n'est pas continue sur *I*, $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle.
Si *f* est la fonction partie entière, avec $I = [0; 2]$, alors $f(I) = \{0; 1; 2\}$

7) Fonction continue strictement monotone

a) Le théorème de la bijection

> ***Corollaire du T.V.I : (Théorème de la bijection)***
>
> Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle *I*. Alors, pour tout réel *k* de l'intervalle image $f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet ***une unique solution*** α dans l'intervalle *I*.

Remarque :

- Lorsqu'une fonction *f* définie sur un intervalle *I* et à valeurs dans un intervalle *J* vérifie la condition : pour tout réel *k* de l'intervalle *J*, il existe un unique réel *c* de l'intervalle *I* tel que $f(x) = k$, on dit que *f* réalise ***une bijection de I dans J.***
- Dans la pratique, ce théorème est le plus utilisé car il permet de prouver l'unicité de la solution. On découpe fréquemment l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone.
- Par contre, on ne connaît pas la valeur de la solution. Pour la trouver on peut utiliser la méthode par balayage avec la calculatrice ou procéder à une dichotomie.

b) Exemple

Résoudre l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ sur l'intervalle $[0; 1]$

On pose $f(x) = x^3 + x - 1$. *f* est dérivable donc continue sur $[0; 1]$ en tant que fonction polynôme. On dérive $f'(x) = 3x^2 + 1$. La dérivée est positive sur $[0; 1]$ car c'est la somme de deux nombres positifs.

- *f* est continue sur $[0; 1]$
- *f* est strictement croissante sur $[0; 1]$
- $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc 0 est une valeur intermédiaire.

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation admet une unique solution dans $[0; 1]$

On utilise la méthode par balayage afin d'obtenir des encadrements successifs.
Encadrement à l'unité : $0 \leq \alpha \leq 1$
Encadrement au dixième : $0{,}6 \leq \alpha \leq 0{,}7$
Encadrement au centième : $0{,}68 \leq \alpha \leq 0{,}69$
Encadrement au millième : $0{,}682 \leq \alpha \leq 0{,}683$

Remarque :

L'élève qui n'utilise pas la méthode par balayage doit taper 682 fois sur la flèche de sa calculatrice pour trouver la valeur approchée demandée…

c) La méthode par dichotomie

Corollaire :

Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle *I*. Si *f* change de signe sur *I*, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle *I*.

Démonstration :

Puisque *f* change de signe sur *I*, il existe deux réels *a* et *b* de *I* tels que $f(a) \times f(b) < 0$.
$f(I)$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$, $0 \in f(I)$
D'après le corollaire du TVI (appliqué à $k = 0$), il existe un unique réel α de l'intervalle I tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice :

Montrer que l'équation $(E): cos(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

On pose $f(x) = cos(x) - x$.
L'équation ne peut pas avoir de solution en dehors de $[-1; 1]$ puisqu'un cosinus est compris dans cet intervalle.
Puisque $f(-1) \approx 1{,}5\,4$ et $f(1) \approx -0{,}46$ et que la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-1; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1; 1]$ donc dans $\mathbb{R}$.

```
a = -1
b = 1
e = 0.001
 une racine entre  0.73828125 et 0.7392578125
```

```python
from math import *
def f(x):
    return(cos(x)-x)
a = float(input("a = "))
b = float(input("b = "))
e = float(input("e = "))
if f(a)*f(b)>= 0:
    print("pas de racine entre ",a,"et",b)
else:
    while b-a >= e:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c)<= 0:
            b = c
        else :
            a = c
    print(" une racine entre ",a,"et",b)
```

Remarque :

On peut reconnaitre ici la recherche d'un point fixe enseigné sur le chapitre des suites. On peut aussi modifier le code en changeant uniquement la fonction Python initiale