Utilisation des nombres complexes en géométrie

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Démontrer l'alignement, l'orthogonalité à l'aide des nombres complexes
- Calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points.
- Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.

Le mathématicien du chapitre :

Jean Le Rond d'Alembert (1717 –1783) est un mathématicien, physicien et philosophe français. Dans le traité de dynamique, il énonce le théorème de d'Alembert qui dit que tout polynôme à coefficients complexes de degré *n* possède exactement *n* racines dans $\mathbb{C}$. Ce théorème ne sera démontré qu'au 19ème siècle par Gauss qui relève plusieurs failles dans la démonstration de d'Alembert.

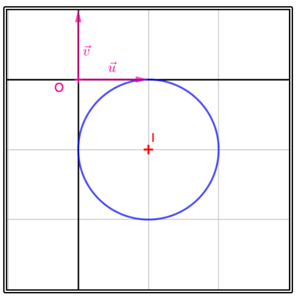
1) Déterminer un ensemble de points

On a vu dans le deuxième chapitre le lien entre complexe et géométrie. Nous allons donner ici un exemple concret.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm.
A tout nombre complexe z, différent de $-i$, on associe le nombre complexe Z défini par :
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}, Z = \frac{z-2+i}{z+i}$$
Mettons tout d'abord le complexe Z sous forme algébrique. Pour cela, on pose : $z = x + iy$
Il faut autant que possible ne pas développer mais travailler avec des facteurs.
$Z = \frac{x+iy-2+i}{x+iy+i}$. On factorise alors $Z = \frac{(x-2)+i(1+y)}{x+i(1+y)}$. En multipliant par le conjugué, on obtient :
$Z = \frac{[(x-2)+i(1+y)][x-i(1+y)]}{[x+i(1+y)][x-i(1+y)]}$. On regroupe partie réelle et partie imaginaire en développant.
$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}, Z = \frac{x(x-2)+(1+y)(1+y)}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{x(1+y)-(x-2)(1+y)}{x^2+(1+y)^2}$$
On souhaite chercher des ensembles de points qui vérifient des conditions.

- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M, d'affixe z tel que Z soit un réel.
  $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0$ On a alors $\frac{x(1+y)-(x-2)(1+y)}{x^2+(1+y)^2} = 0$
  On s'intéresse alors au numérateur $x(1+y) - (x-2)(1+y) = 0 \Leftrightarrow y = -1$
  M est donc sur la droite d'équation $y = -1$ pour que $Im(Z) = 0$ privé de $A(-i)$
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M, d'affixe z tel que Z soit un imaginaire pur.
  $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0$ On a alors $\frac{x(x-2)+(1+y)(1+y)}{x^2+(1+y)^2} = 0$
  On s'intéresse alors au numérateur $x(x-2) + (1+y)(1+y) = 0$
  On développe : $x^2 - 2x + (1+y)^2 = 0$.
  A l'aide de la forme canonique vue en première, $(x-1)^2 + (1+y)^2 = 1$
  M est donc sur le cercle de centre $I(1\,;-1)$ et de rayon $r = 1$ pour que $Re(Z) = 0$

Conclusion :

- Pour que $Im(Z) = 0$, M doit être sur la droite horizontale d'équation $y = -1$, privé de $A(-i)$
- Pour que $Re(Z) = 0$, M doit être sur le cercle de centre $I(1\,;-1)$ et de rayon $r = 1$, privé de $A(-i)$



2) *Interprétation géométrique de* $\frac{c-a}{b-a}$

Soient *A, B* et *C* trois points d'affixes respectives *a, b* et *c*

Le nombre $\frac{c-a}{b-a}$ joue un rôle fondamental en géométrie car il permet de déterminer par un calcul de module (longueur) ou d'argument(angle) la position de trois points *A, B* et *C*.

La position des lettres peut changer dans la formule. C'est l'idée qu'il faut retenir et non pas apprendre bêtement une formule.

a) *Le module de* $\frac{c-a}{b-a}$

Théorème :

Soient *A, B* et *C* trois points d'affixes respectives *a, b* et *c*

- $|a-c| = |c-a| = AC$
- $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB}$

Remarque :

Cette propriété liée aux modules permet notamment de prouver qu'un triangle est isocèle.

Exemple 1 :

On donne $a = 3+4i$, $b = 1+7i$ et $c = 1+i$. On souhaite montrer que le triangle *ABC* est isocèle en *A*.

On évalue alors $\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+i-(3+4i)}{1+7i-(3+4i)}$ soit $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-2-3i}{-2+3i}$. Il n'est pas nécessaire d'utiliser l'expression conjuguée pour faire apparaitre la forme algébrique. En utilisant le fait que le module d'un quotient est le quotient des modules, on a : $\left|\frac{-2-3i}{-2+3i}\right| = \frac{|-2-3i|}{|-2+3i|} = \frac{|-2-3i|}{|-2-3i|} = 1$

On a donc que $\frac{AC}{AB} = 1$ soit $AC = AB$ Le triangle *ABC* est isocèle en *A*.

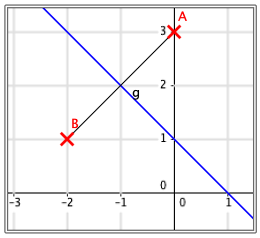
Exemple 2 :

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $\left|\frac{z-3i}{z+2-i}\right| = 1$

On pose $A(3i)$ et $B(-2+i)$ deux points du plan complexe.

La condition de l'énoncé devient alors $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$ soit donc $\frac{MA}{MB} = 1$

M décrit donc la médiatrice de $[AB]$, ensemble des points équidistants de *A* et *B*.



b) *L'argument de* $\frac{c-a}{b-a}$

Théorème :

Soient *A, B* et *C* trois points d'affixes respectives *a, b* et *c*, alors on a:

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ (2\pi)$

Démonstration :

On utilise la propriété des arguments :

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = arg(c-a) - arg(b-a)\ (2\pi)$

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$. On inverse alors l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}, \vec{u})\ (2\pi)$

$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC})\ (2\pi)$ soit $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ (2\pi)$

Remarque :

On peut parfois combiner la propriété sur les longueurs avec la propriété sur les arguments.

Exemple 1 :

On s'intéresse aux points $A(1)$, $B(j)$ et $C(\bar{j})$. On évalue $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\bar{j}-1}{j-1} = \frac{e^{\frac{-2i\pi}{3}}-1}{e^{\frac{2i\pi}{3}}-1}$

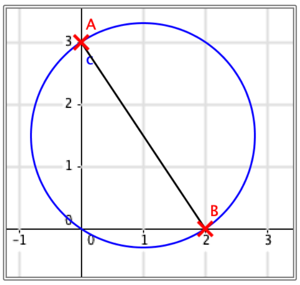
En passant à la forme algébrique $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\frac{-3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{-3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3} = \frac{\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On reconnait alors $\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$. En exploitant le module et l'argument, on a :

$$\left.\begin{array}{r} \left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \\ arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} = (2\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{array}\right\} \text{Alors le triangle } ABC \text{ est équilatéral}$$

Exemple 2 :

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que $arg\left(\frac{z-3i}{z-2}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. On pose $A(3i)$ et $B(2)$ deux points du plan complexe. La condition de l'énoncé devient alors $arg\left(\frac{z-3i}{z-2}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$ soit donc $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Le triangle MBA est rectangle en M. M décrit donc le demi-cercle inférieur de diamètre $[AB]$, privé des points A et B



Remarques :

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0\ (\pi)$
- Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

3) *Les racines $n^{ième}$ de l'unité*

a) *Rappel de définition*

Cette notion a été abordée au chapitre précédent. On redonne la définition pour rappel.

Définition :

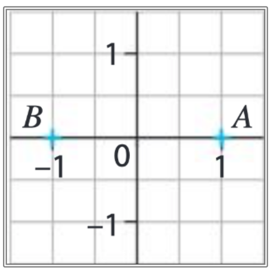
Soit n un entier naturel non nul. L'équation $(E_n): z^n = 1$ possède n racines complexes distinctes appelées racines $n^{ième}$ de l'unité. On note $\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [|0; n-1|]\right\}$

b) *Lien avec la géométrie*

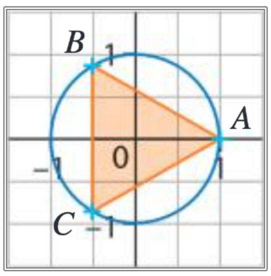
Propriété :

Les points images des éléments de $\mathbb{U}_n$ avec $n > 0$ appartiennent au cercle trigonométrique.
Les points images des éléments de $\mathbb{U}_n$ avec $n \geq 3$ sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

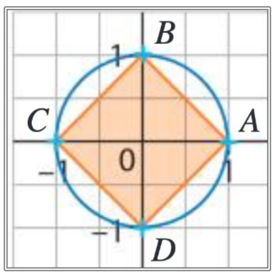
Premiers cas :



$\mathbb{U}_2 = \{-1\,;1\}$



$\mathbb{U}_3 = \{1\,;j\,;\bar{j}\}$



$\mathbb{U}_4 = \{-1\,;\ 1\,;-i\,;\ i\}$

Démonstration :

On nomme A_k le point d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [|0\,;n-1|]$

- $OA_k = \left|e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1$ Donc A_k est sur le cercle de centre 0 et de rayon 1.
- $\left(\overrightarrow{OA_{k+1}}, \overrightarrow{OA_k}\right) = arg\left(\frac{e^{\frac{2(k+1)\pi}{n}}}{e^{\frac{2k\pi}{n}}}\right) = arg\left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right) = \frac{2\pi}{n}\ (2\pi)$. Tous les angles au centre ont la même valeur $\frac{2\pi}{n}$.

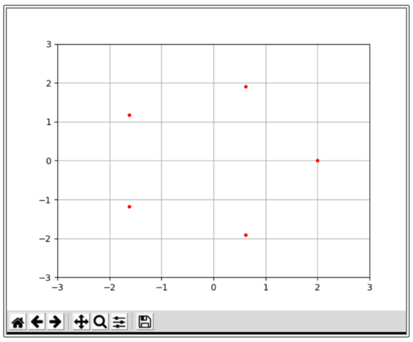
Les points A_k forment un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

c) Construction du pentagone régulier à la règle et au compas

On rappelle l'ensemble $\mathbb{U}_5 = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k \in [|0\,;4|]\right\}$. Les éléments de $\mathbb{U}_5$ sont solutions de l'équation complexe $(E_5) : z^5 = 1$

Programmation avec Python :

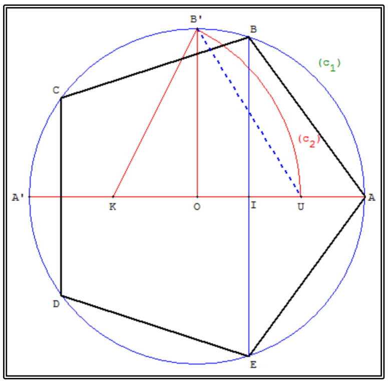
```python
import matplotlib.pyplot as plt
from math import*
from cmath import*
def polygone(n):
    plt.axis([-3,3,-3,3])
    plt.grid()
    x = [2*cos(2*k*pi/n) for k in range(n)]
    y = [2*sin(2*k*pi/n) for k in range(n)]
    plt.plot(x,y,'r.')
    plt.show()
```



Il existe de multiples méthodes pour construire un pentagone régulier. Nous allons reprendre ici la méthode de Ptolémée (environ -100 avant JC). Toutes les manipulations doivent être faites à la règle ou au compas (pas de mesure de longueur par exemple)

Méthode :

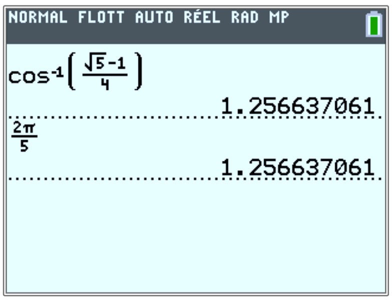
On trace un cercle de centre O, de rayon 1. On trace un diamètre $[AA']$ ainsi qu'un rayon $[OB']$ perpendiculaire au diamètre. On place K, milieu de $[OA']$; On trace le cercle de centre K passant par *B'*. Il construit *U* sur $[OA]$.
On trace la médiatrice de $[OU]$. Elle coupe le cercle trigonométrique en *B* et *E* qui sont les sommets du pentagone Le cercle de centre *B* passant par *A* recoupe le cercle trigonométrique en *C*. Par symétrie avec l'axe des abscisses, on trouve le dernier sommet du pentagone.



Pourquoi ça marche ?

On a sur la figure $OA = OB' = 1$ mais aussi $OK = \frac{1}{2}$.

On utilise le théorème de Pythagore dans *OKB'*. On obtient $KB' = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Puisque $KU = KB'$, on obtient alors $OU = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et puisque *I* est construit par médiatrice, on a : $OI = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
Dans le triangle OIB, rectangle en *I*, on peut évaluer le cosinus : $cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1}$



On a donc $cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ on obtient $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$.