Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

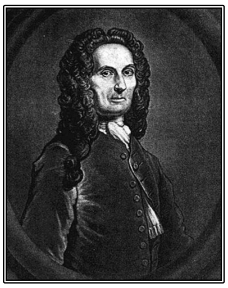
Nombres complexes et trigonométrie

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et exponentielle et inversement.
- Effectuer des calculs sur les nombres complexes en choisissant la forme la plus adaptée dans le cadre de la résolution de problème.
- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques dans des contextes divers.

Le mathématicien du chapitre :

Abraham de Moivre (1667 –1754) est un mathématicien français. Il est connu pour ces nombreux travaux en probabilités avec la loi normale. Il fut le premier en 1707 à écrire la formule qui porte son nom dans ses travaux sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes. C'est finalement Euler qui en 1748 démontrera de manière rigoureuse cette formule dans son ouvrage « l'introduction à l'analyse infinitésimale ».



1) Rappel de trigonométrie

a) Cosinus et sinus d'un nombre réel

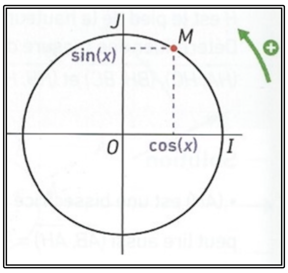
Sauf précision contraire, l'unité utilisée est le radian. On considère un cercle trigonométrique C de centre O. Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

Définition :

Soit x un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :
Cosinus de réel x, noté $cosx$ l'abscisse du point M.
Sinus du réel x, noté $sinx$ l'ordonnée du point M

Remarque :

En lisant sur le cercle ci-contre, on peut déjà obtenir les valeurs particulières :
$cos0 = 1$ et $sin0 = 0$ pour le point I.
$cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $sin\frac{\pi}{2} = 1$ pour le point J.
$cos\pi = -1$ et $sin\pi = 0$ pour le symétrique de I par rapport à O
$cos\frac{3\pi}{2} = 0$ et $sin\frac{3\pi}{2} = -1$ pour le symétrique de J par rapport à O



Vocabulaire :

Le cercle trigonométrique est partagé en 4 quadrants. On les différencie grâce aux signes de cosinus et sinus. Le premier, en haut à droite, a des sinus et cosinus positifs.

b) Valeurs remarquables

Il faut absolument connaître les valeurs remarquables des angles de base. On peut ensuite retrouver en changeant de quadrant les valeurs d'autres angles en utilisant les angles associés. Le tableau basique est assez simple à comprendre.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Pour retenir ces valeurs, il suffit de se rendre compte que les valeurs du cosinus décroissent avec $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ et que les valeurs de sinus croissent.

Exemples :

Donner les valeurs exactes des nombres suivants en utilisant les angles associés :

- $cos\frac{3\pi}{2} = cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $sin\frac{7\pi}{2} = sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$
- $cos\frac{3\pi}{4} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $sin\frac{-2\pi}{3} = -sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

c) Formules d'addition, de duplication et de linéarisation

Formules d'addition :

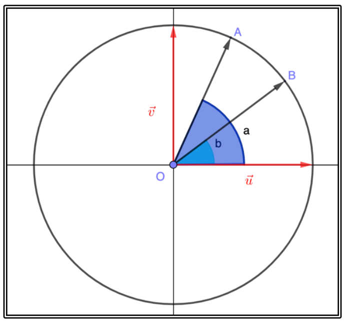
Soient a et b deux réels

$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$
$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$
$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + sin(b)\,cos(a)$
$sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - sin(b)\,cos(a)$

Remarques :

- On a coutume de dire que le cosinus est raciste et menteur.
- Ces formules permettent de retrouver les formules des angles associés.

Démonstration :



Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v})$, on peut écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}cos(b)\\sin(b)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}cos(a)\\sin(a)\end{pmatrix}$

On utilise l'expression analytique du produit scalaire.

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,\sin(b)$$

On utilise l'expression classique du produit scalaire :

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times cos\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$

Le cercle trigonométrique ayant pour rayon 1

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = cos(a-b)$. On obtient donc la deuxième propriété.

Exemples :

- Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

  On applique alors la formule $cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right)cos(x) - sin\left(\frac{\pi}{2}\right)sin(x)$

  Puisque $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ on a naturellement $cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\,sin(x)$

- Déterminer $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

  On remarque tout d'abord que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ On utilise alors une formule d'addition

  $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ soit donc $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice :

Factoriser l'expression pour tout x réel : $A = cos(x) + sin(x)$

Le sens du mot factoriser est ici piégeux. En effet, l'apparition d'un produit n'est pas une évidence. Puisque l'exercice est dans la partie formules d'addition, il faut donc les utiliser mais il faut aussi en faire apparaître une. Le seul angle qui a un cosinus et un sinus égal est $\frac{\pi}{4}$

$A = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}sin(x)\right)$ soit donc $A = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos(x) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right)sin(x)\right)$

Soit donc $A = \sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ qui aurait pu aussi s'écrire $A = \sqrt{2}\,sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Formules de duplication :

Soient a un réel

$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a)$ $\quad$ $cos(2a) = 2cos^2(a) - 1$

$cos(2a) = 1 - 2sin^2(a)$ $\quad$ $sin(2a) = 2sin(a)\cos(a)$

Remarque :

Ces formules découlent naturellement des formules d'addition et de la relation fondamentale de la trigonométrie.

Exemple :

Donner la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

On écrit donc $cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$ soit en remplaçant $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$

En isolant $\frac{2+\sqrt{2}}{4} = cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ Puisque $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, $cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

En inversant les formules de duplication, on obtient les formules ci-dessous.

Formules de linéarisation :

Soient a un réel $cos^2(a) = \frac{1+cos(2a)}{2}$ et $sin^2(a) = \frac{1-cos(2a)}{2}$

2) *Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique*

a) *Passage de la forme algébrique à une forme trigonométrique*

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul. On a donc en particulier $|z| \neq 0$ car $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Après avoir calculé le module, on peut alors le factoriser dans la forme algébrique :
Ainsi $z = a + ib$ devient $z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

On cherche donc un nombre θ qui vérifie les deux conditions : $\begin{cases} cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

On sait grâce à la relation fondamentale de la trigonométrie que θ existe.
On a alors une forme trigonométrique de z qui s'écrit : $z = r\big(\cos(\theta) + isin(\theta)\big)$

Remarque :

Pour déterminer sans se tromper un argument, il convient de trouver dans quel quadrant se trouve l'angle cherché. On l'évalue en fonction du signe de $Re(z)$et de $Im(z)$

Exemples :

Déterminer une forme trigonométrique des complexes suivants :

- $z_1 = -\sqrt{3} + i$
- $|z_1| = 2$
- $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
- $\begin{cases} cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$
- $z_1 = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

- $z_2 = 5 - 5i$
- $|z_2| = 5\sqrt{2}$
- $z_2 = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $\begin{cases} cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
- $z_2 = 5\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

Remarque :

Lorsque les parties réelles et imaginaires sont égales au signe près, on est certain d'avoir affaire à $\frac{\pi}{4}$ ou l'un de ses copains. Il faut juste trouver le bon quadrant.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Exercice :

Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique.

- $z = -cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
- $z = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + icos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Solution :

Si vous pensez qu'ils sont déjà sous forme trigonométrique, c'est que vous avez manqué un épisode de l'histoire. Il n'y a pas de signe – dans une forme trigonométrique…
Il faut utiliser les angles associés pour remettre les choses dans l'ordre.

- $z = -cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
- $z = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- $z = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$
- $z = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) Intérêt de la forme trigonométrique pour les calculs compliqués

On souhaite déterminer la forme trigonométrique de $Z = (-1 - i)^{2020}$

Il est évidemment hors de question de développer l'expression même si on a appris le binôme de Newton au chapitre précédent. On va la jouer plus fine en utilisant les formules sur les arguments et les modules. On pose $z = -1 - i$
On détermine aisément sa forme trigonométrique en calculant le module puis un argument.
$z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$ On a donc ici $Z = z^{2020}$.
Au chapitre précédent, on a appris des formules sur les modules et les arguments :
$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n \\ \forall n \in \mathbb{N}, arg(z^n) = narg(z)\ (2\pi) \end{cases}$ Ainsi : $\begin{cases} |Z| = \sqrt{2}^{2020} \\ arg(Z) = 2020 \times \frac{-3\pi}{4}\ (2\pi) \end{cases}$

On a donc $\begin{cases} |Z| = 2^{1010} \\ arg(Z) = \pi(2\pi) \end{cases}$ et donc $Z = 2^{1010}\left(cos(\pi) + isin(\pi)\right)$

3) La forme exponentielle

a) Forme exponentielle

On rappelle que tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ (ensemble des complexes de module 1) s'écrit sous la forme $z = \cos(\theta) + isin(\theta)$

> ***Définition :***
> On pose $\forall\theta \in \mathbb{R},\ cos(\theta) + isin(\theta) = e^{i\theta}$

Remarques :

Ainsi, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, z = e^{i\theta}\ avec\ \theta \in \mathbb{R}\}$

Exemples :

Les complexes basiques s'écrivent donc :

- $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- $1 = e^{i0}$
- $-1 = e^{i\pi}$

Remarquons que ces 4 complexes sont dans $\mathbb{U}$

> ***Théorème :***
> • Tout nombre complexe non nul z, s'écrit $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $arg(z) = \theta(2\pi)$
> • Réciproquement, si un nombre complexe z s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta(2\pi)$
> L'écriture $z = re^{i\theta}$avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ réel est une ***forme exponentielle*** du complexe z.

Remarque :

Comme pour la forme trigonométrique, 0 est le seul complexe qui ne peut pas s'écrire sous forme exponentielle.

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

Exemple :

On souhaite mettre $z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle. On effectue le même chemin que pour la forme trigonométrique en déterminant le module puis en factorisant.

$|z| = 2$ soit en factorisant $z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On cherche alors un argument de z :

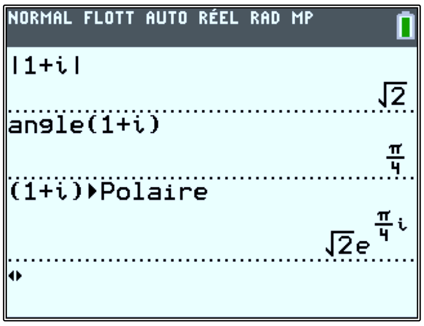
$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{-1}{2} \\ sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ On a donc : $z = 2\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ et donc $z = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Comparaison Python vs Ti-83 :

On souhaite déterminer les coordonnées polaires de $z = 1 + i$

```python
from cmath import *
def trigo(a,b):
    z = complex(a,b)
    print(abs(z))
    print(phase(z))
    print(polar(z))
```

```
> trigo(1,1)
1.4142135623730951
0.7853981633974483
(1.4142135623730951, 0.7853981633974483)
```



La TI-83 est plus performante que Python sur l'affichage des radians en valeur exacte.

b) Propriétés

Propriétés algébriques :

$\forall\theta \in \mathbb{R}$ et$\forall\theta' \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes.

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta'+\theta)}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Exercice :

Déterminer une forme exponentielle des nombres :

- $z_1 = 2 + 2i$
- $z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$
- $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$
- $z_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On pose alors $Z = \frac{{z_1}^3}{{z_2}^5}$ $Z = \frac{\left(2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^3}{\left(2e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^5} = \frac{16\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}{32e^{\frac{10i\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{31\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$

Exercice :

On donne $Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$. Donner la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solution :

La première idée de mettre le complexe Z sous forme algébrique.

$Z = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}$ soit en développant $Z = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ mais on n'obtient pas les réponses.

On part donc sur la forme exponentielle des complexes.

$Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{i\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{12}\right)}$ soit en développant $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$

On identifie alors avec la forme algébrique : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

4) Les formules de Moivre et d'Euler

a) La formule de Moivre

Propriété :

$\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + isin(n\theta)$

Remarque :

On peut aussi écrire la formule sous la forme $\forall n \in \mathbb{N}\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Exemple :

Pour $n = 2$, on a $\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)^2 = cos(2\theta) + isin(2\theta)$
En développant l'identité remarquable, on obtient :

$$(cos(\theta))^2 + 2icos(\theta)sin(\theta) - (sin(\theta))^2 = cos(2\theta) + isin(2\theta)$$

Deux complexes sont égaux si leur partie réelle est leur partie imaginaire sont égales.

$\begin{cases} cos(2\theta) = (cos(\theta))^2 - (sin(\theta))^2 \\ sin(2\theta) = 2cos(\theta)sin(\theta) \end{cases}$ On retrouve les formules de duplication.

b) Les formules d'Euler

Propriétés :

$\forall\theta \in \mathbb{R}$, on a : $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Exemple :

En utilisant les formules d'Euler et de Moivre, on peut linéariser $(\cos(\theta))^3$

On a : $(cos(\theta))^3 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3$. On peut développer à l'aide du binôme

$$(cos(\theta))^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)$$

Ainsi, $cos^3(\theta) = \frac{1}{4}cos(3\theta) + \frac{3}{4}cos(\theta)$
La linéarisation sert par exemple à calculer des intégrales ou primitives de fonctions trigos.

c) Vers le supérieur

Exercice :

Soit $x \in \mathbb{R} - \{2p\pi, p \in \mathbb{Z}\}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$
2. Montrer que $\forall\theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = -2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
3. En déduire que$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)}$
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \sum_{k=0}^{n} sin\ (kx) = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}sin\left(\frac{nx}{2}\right)$

Solution :

Cet exercice est clairement un exercice très calculatoire. Il faut le maitriser pour les élèves qui ont pour ambition d'aller en MPSI.

1. n ne peut pas être nul car on souhaite appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique. On a $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$
   On applique donc la formule de la somme avec $q = e^{ix}$
   On obtient $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

Copyright © Tous droits réservés
Ce document, ou toute partie de celui-ci, ne peut être reproduit ou utilisé de quelque manière que ce soit sans l'autorisation écrite expresse du propriétaire.

2. Pour transformer l'écriture, on utilise une technique bien connue. On factorise par la demi-somme des arguments.
   Ainsi $1 - e^{i\theta} = e^{i0} - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$
   On reconnait la formule d'Euler et donc $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \left(-2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$
3. On va donc appliquer deux fois la formule ci-dessus, une fois pour le numérateur et une fois pour le dénominateur de l'égalité de la première question.
   Avec $\theta = (n+1)x, 1 - e^{i(n+1)x} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \times \left(-2isin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right)$
   Avec $\theta = x, 1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} \times \left(-2isin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
   On a alors $\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\times\left(-2isin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\times\left(-2isin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)}$
   Et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)}$
4. On décompose les parties réelles et imaginaires dans chacun des deux membres.
   $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} cos(kx) + isin(kx)$ d'une part
   $e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)} = cos\left(\frac{nx}{2}\right) + isin\left(\frac{nx}{2}\right)$ d'autre part.
   On égalise alors les parties réelles et imaginaires.
   On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} sin\left(\frac{nx}{2}\right)$