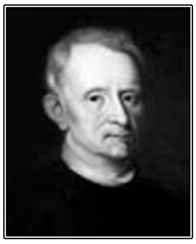
Les nombres complexes : point de vue géométrique

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.
- Représenter un nombre complexe par un point.
- Affixe d'un point.

Le mathématicien du chapitre :

Jean Robert Argand (1768 –1822) est un mathématicien suisse. Il publie en 1806 une interprétation géométrique des nombres complexes comme points dans le plan en faisant correspondre $a + ib$ au point de coordonnées $M(a; b)$. Il publia en 1814 une démonstration rigoureuse du théorème de D'Alembert-Gauss.



1) Représentation géométrique des nombres complexes

Rappel :

Un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan est dit ***direct*** si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.
On note $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$. Le repère est dit ***indirect*** si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-\pi}{2}\ (2\pi)$

Définition :

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z = a + ib$ (a et b réels). On dit que :

- Le point $M(a; b)$ est ***l'image*** du complexe z, ou que z est l'affixe du point $M(a; b)$ et on note $z = aff(M)$.
- Le vecteur $\vec{V}(a; b)$ est le ***vecteur image*** du complexe z ou que le complexe z est l'affixe du vecteur $\vec{V} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et on note $z = aff(\vec{V})$.

Remarque :

Très souvent, on notera z_M (respectivement $z_{\vec{V}}$) l'affixe d'un point M (d'un vecteur $\vec{V}$)

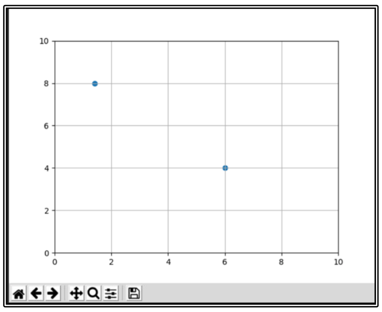
Exemples :

Si M est le point de coordonnées $M(\sqrt{2}; 8)$ alors $z_M = \sqrt{2} + 8i$
Si $\vec{V} = -\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$ alors $z_{\vec{V}} = -1 + \frac{3}{4}i$

Avec Python :

Placer dans un repère les points d'affixes $z_M = \sqrt{2} + 8i$ et $z_N = 6 + 4i$

```python
from math import*
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.axis([0,10,0,10])
plt.grid()
x = [sqrt(2),6]
y = [8,4]
plt.scatter(x,y)
plt.show()
```



Propriétés :

Soit z un nombre complexe d'image le point M dans le plan complexe

- $z \in \mathbb{R}$ équivaut à M appartient à l'axe des abscisses. L'axe des abscisses est alors appelé l'axe des réels
- $z \in i\mathbb{R}$ équivaut à M appartient à l'axe des ordonnées. L'axe des ordonnées est alors appelé axe des imaginaires purs.

2) Affixe de Vecteur

Propriétés :

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales.

$$\vec{V}=\vec{U} \Leftrightarrow aff(\vec{V})=aff(\vec{U})$$

Remarque :

Cette propriété sera très utile comme on le verra plus loin, car elle permet de remplacer un calcul vectoriel par un calcul sur les complexes.

a) Affixe d'une somme de deux vecteurs

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z=a+ib$ et $z=a'+ib'$.
$\vec{U}(a;b)$ et $\vec{V}(a';b')$ donc $\vec{U}+\vec{V}(a+a';b+b')$
Alors $aff(\vec{U}+\vec{V})=(a+a')+i(b+b')$ donc $aff(\vec{U}+\vec{V})=aff(\vec{U})+aff(\vec{V})$

b) Affixe du produit d'un vecteur par un réel

Soit k un réel et $\vec{U}$ un vecteur d'affixe $z=a+ib$.
$\vec{U}(a;b)$ donc $k\vec{U}(ka;kb)$ Alors $aff(k\vec{U}+\vec{V})=ka+ikb=kaff(\vec{U})$

Propriétés :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs
- $aff(-\vec{U})=-aff(\vec{U})$
- $aff(\vec{U}-\vec{V})=aff(\vec{U})-aff(\vec{V})$
- Pour tous réels k et k', $aff(k\vec{U}+k'\vec{V})=kaff(\vec{U})+k'aff(\vec{V})$

Exemple :

On donne $z_{\vec{U}}=3-5i$ et $z_{\vec{V}}=-8+12i$, alors donne $z_{2\vec{U}+\vec{V}}=-2+2i$

c) Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Ainsi donc $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{OB}}-z_{\overrightarrow{OA}}=z_B-z_A$

Propriété :

Pour tous points A et B du plan d'affixes z_A et z_B, on a : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

Remarque :

On retrouve la formule « extrémité moins origine » établie en seconde

Exemple :

Si $z_A=-1+3i$ et $z_B=4+5i$ alors $z_{\overrightarrow{AB}}=4+5i-(-1+3i)=5+2i$

d) Affixe du milieu d'un segment

Propriété :

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors l'affixe de I est $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

Démonstration :

Puisque $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, alors en passant par les affixes, on obtient que l'affixe du point I vérifie :
$z_I-z_A=\frac{1}{2}(z_B-z_A)$ soit en isolant $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$

Remarques géométriques :

Soit M, N et P trois points du plan avec M d'affixe z :

- N a pour affixe $\bar{z}$ signifie que les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- P a pour affixe $-z$ signifie que les points M et P sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Avec Python :

```python
from math import *
def milieu(a,b,c,d):
    z1 = complex(a,b)
    z2 = complex(c,d)
    z = (z1+z2)/2
    return(z)
```

Déterminer l'affixe du milieu du segment formé par les deux points d'affixes $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 3 + 4i$

```
> milieu(1,2,3,4)
(2+3j)
```

3) Module d'un nombre complexe

Définition :
Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le ***nombre réel positif*** noté $|z|$.
On a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$

Remarque :

Le seul complexe de module nul est le complexe nul.

Exemples :

- $|1 - 4i| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$
- $\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

Cas particuliers :

- $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$
- $|i| = 1$
- $|-5i| = 5$

Propriété :

Soit z un nombre complexe. Alors, $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$

Démonstration :

$z \times \bar{z} = (a + ib)(a - ib)$
$z \times \bar{z} = a^2 - iab + iba - (ib)^2$ soit donc $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ et donc $z \times \bar{z} = |z|^2$

Remarque :

Bien que la notation soit semblable, il ne faut pas confondre module et valeur absolue. Les deux notions coïncident si le complexe est un réel.

Interprétation géométrique :

Le module d'un nombre complexe z correspond à la longueur du vecteur reliant l'origine du repère au point M d'affixe. On a donc :$|z| = |z_{\overrightarrow{OM}}| = |z_M - z_O|$

Propriétés :
Pour tous nombres complexes z et z' :
- $|z| \in \mathbb{R}^+$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$
- Si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

Remarque :

Le calcul du module doit s'effectuer pour la plupart du temps mentalement. Il est indispensable de maitriser cette étape pour la suite du chapitre.

Démonstration :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$
Alors $zz' = aa' - bb' + i(ab + ba)$
Ainsi, $|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab + ba)^2}$
En développant, $|zz'| = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2}$
En calculant séparément, $|z| \times |z'| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}$
On obtient $|z| \times |z'| = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2}$

Exemples :

- $\left|(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)\right| = |1-i|\left|1+i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2} \times 2$
- $|(2-i)^3| = |(2-i)|^3 = \sqrt{5}^3 = 5\sqrt{5}$
- $\left|\frac{1-i}{i(1-i\sqrt{3})}\right| = \frac{|1-i|}{|i||(1-i\sqrt{3})|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Interprétation géométrique :

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, alors on a :
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$

Remarque :

- Il n'y a évidemment pas d'ordre dans la formule puisque $AB = BA = |z_B - z_A|$
- Si $|z| = r$, alors M est sur le cercle de centre O et de rayon r.

4) Ensemble des complexes de module 1

Les nombres complexes de module 1 forment un ensemble important des mathématiques. Nous allons voir ici des propriétés importantes de cet ensemble, appelé aussi groupe.

Définition :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté : $\mathbb{U}$
On a : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Remarque :

- $\mathbb{U}$ est non vide puisque 1 est un élément de $\mathbb{U}$.
- 0 n'est pas un élément de $\mathbb{U}$
- $\mathbb{U}$ contient les affixes de tous les points du cercle trigonométrique.

Avec Python :

```python
from math import *
def test(a,b):
    m = sqrt(a**2+b**2)
    if m == 1:
        print("élément de U")
    else :
        print(" pas élément de U")
```

```
> test(1,0)
élément de U
> test(2,5)
 pas élément de U
> test(-1/2,sqrt(3)/2)
 pas élément de U
```

Attention :

D'après Python, $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ n'est pas dans $\mathbb{U}$. Pourtant, $\left|\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$
j joue un rôle fondamental dans les complexes, raison pour laquelle il a un nom à part.

Propriété :

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$, alors :

- $z \times z' \in \mathbb{U}$
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$
- $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Vocabulaire :

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit et inverse. Attention, ce n'est pas le cas pour l'addition.

5) Argument d'un nombre complexe

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Idée directrice :

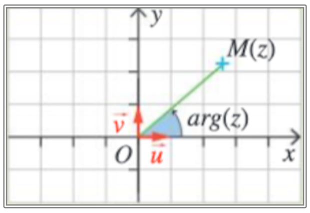
Un point du plan est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou affixe). Peut-on le repérer autrement ? En ayant une longueur donnée depuis l'origine (module), ce point se trouve sur un cercle donné. En fixant un angle avec l'axe des abscisses, ce point est repéré de manière unique par la donnée d'une longueur et d'un angle : ce sont les coordonnées polaires.

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul, d'image le point M dans le plan complexe. Un argument de z est une mesure (en radians) de l'angle orienté$(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
Si $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta\ (2\pi)$, on note $arg(z) = \theta\ (2\pi)$.

Remarque :

- Si $z = 0$, $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini. 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.
- On rappelle que (2π)signifie que l'angle est défini à un nombre de tour près.(voir la mesure principale de première)



a) Caractérisation des réels et des imaginaires purs par un de leurs arguments

Avec la définition précédente, on a quelques cas particuliers :

- $arg(i) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $arg(-2i) = \frac{-\pi}{2}\ (2\pi)$
- $arg(1) = 0\ (2\pi)$
- $arg(-\sqrt{5}) = \pi\ (2\pi)$
- $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
- $arg(j) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

Propriété :

Soit z un nombre complexe,
- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0\ (2\pi)$
- $z = ib, b \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg(z) = \pi\ (2\pi)$
- $z = ib, b \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{-\pi}{2}\ (2\pi)$

b) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, un nombre complexe non nul représenté par M dans le plan complexe.
On note θ un argument de z et $r = |z|$. Ainsi, $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta\ (2\pi)$ et $r = OM$
$(r; \theta)$ est le couple module et argument du point M relativement au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. En appliquant la trigonométrie dans le triangle OMH, on a :$\begin{cases} cos\ (\theta) = \frac{a}{r} \\ sin\ (\theta) = \frac{b}{r} \end{cases}$ En factorisant par le module, on a : $z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$

Théorème :

- Tout nombre complexe non nul z s'écrit $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$ où :
 $r = |z|$et $arg(z) = \theta\ (2\pi)$
- Réciproquement, si z s'écrit sous la forme $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $r = |z|$ et $arg(z) = \theta\ (2\pi)$

L'écriture $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$ est une forme trigonométrique du nombre complexe z.

Remarque :

Attention, $z = 3\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ n'est pas une forme trigonométrique.

Exemple :

- $|i| = 1$ et $arg(i) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc $i = 1\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
- $|-3| = 3$ et $arg(-3) = \pi\ (2\pi)$ donc $-3 = 3\big(cos(\pi) + isin(\pi)\big)$
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ donc $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Conséquence :

Tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme $z = cos(\theta) + isin(\theta)$

Exemple :

$j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ devient en forme trigonométrique : $j = 1\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

c) *Nombres complexes égaux*

Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et M' dans le plan complexe.

$$z = z' \Leftrightarrow M \text{ et } M' \text{confondus} \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ arg(z) = arg(z')\ (2\pi) \end{cases}$$

Propriétés :

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo (2π)

d) *Forme trigonométrique de -z et $\bar{z}$*

Soit z un complexe non nul, $r = |z|$ et $arg(z) = \theta\ (2\pi)$. En utilisant les symétries axiales et centrales, on peut écrire que :

- $\bar{z} = r(cos(-\theta) + isin(-\theta))$. $\bar{z}$ a le même module que z et un argument opposé.
- $-z = r\big(\cos(\theta + \pi) + isin(\theta + \pi)\big)$. $-z$ a le même module que z et un argument déphasé de π

Exemple :

On a montré plus haut que $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. On a donc :

- $1 - i = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$
- $-1 - i = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$

e) *Propriétés des arguments*

Théorème :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors, on a:

- $arg(zz') = arg(z) + arg(z')\ (2\pi)$
- $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\ (z)\ (2\pi)$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')\ (2\pi)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, arg(z^n) = narg(z)\ (2\pi)$

Remarque :

Ces propriétés seront démontrées au chapitre suivant.

Exemple :

$Si\ z = (1+i)^{2020}$, alors $arg(z) = 2020 \times \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$. On a donc $arg(z) = \pi\ (2\pi)$