Les nombres complexes : point de vue algébrique

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
- Résoudre une équation linéaire $az = b$.
- Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\bar{z}$

Le mathématicien du chapitre :

Leonhard Euler (1707-1783) est un mathématicien suisse qui a introduit de nombreuses notations mathématiques. Il fut le premier à écrire $f(x)$pour désigner l'image d'un nombre par une fonction.
En 1777, Il note i le « nombre imaginaire » $\sqrt{-1}$. On utilisa alors des nombres de la forme $x + iy$ avec x et y réels, qualifiés de « nombres imaginaires ».

1) Description de $\mathbb{C}$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle, c'est à dire dans $\mathbb{R}$. On va définir un ensemble noté $\mathbb{C}$ dans lequel cette équation admet au moins une solution.

Propriété et définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, vérifiant les conditions suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

Remarque :

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ En effet tout nombre réel peut s'écrire sous la forme $z = a + i \times 0$.
Un tel nombre sera appelé ***un réel***.

Vocabulaire :

L'écriture $z = a + ib$ où a et b sont des réels, est la ***forme algébrique*** du complexe z

- a est la ***partie réelle*** du complexe z, notée $Re(z)$
- b est la ***partie imaginaire*** du complexe z, notée $Im(z)$

Remarque :

$Re(z)$et $Im(z)$ sont ***toujours*** des nombres réels. Il n'y a pas de i dans $Im(z)$

Exemple :

Si $z = -3 + \frac{5}{2}i$ alors $Re(z) = -3$ et $Im(z) = \frac{5}{2}$

Si $z = -3\sqrt{2}i$ alors $Re(z) = 0$ et $Im(z) = -3\sqrt{2}$

Vocabulaire :

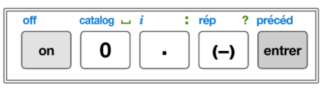
Les nombres complexes de la forme $z = ib$ où $b \in \mathbb{R}$ sont appelés ***imaginaires purs.***

Attention :

A ne pas confondre imaginaire pur et partie imaginaire.

$z = -\frac{5}{3}i$ est un imaginaire pur, de partie imaginaire $-\frac{5}{3}$

Remarque :



La TI-83 sait travailler avec les nombres complexes.

Propriétés :

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont réels, deux nombres complexes.
  Alors $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$
- Un complexe z est nul si, et seulement si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

- $z^2 + 1 = 0$
- $z^2 = -1$
- $z^2 = i^2$
- $z = i$ ou $z = -i$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{i; -i\}$

- $(z+2)^2 = -5$
- $(z+2)^2 = 5i^2$
- $z = -2 + i\sqrt{5}$ ou $z = -2 - i\sqrt{5}$
- Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{-2 + i\sqrt{5}; -2 - i\sqrt{5}\right\}$

Remarque :

Il est important de noter que pour les deux équations ci-dessus, $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

2) Opérations dans $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni d'une addition et d'une multiplication prolongeant les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$. Les calculs se font dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, il suffit de tenir compte de la condition $i^2 = -1$ à chaque fois que le calcul $i \times i$ se rencontre dans un calcul.

Propriétés opératoires :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont réels, deux nombres complexes.

- Addition : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- Produit : $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- Distributivité : $z(z' + z'') = z \times z' + z \times z''$
- Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Exemples :

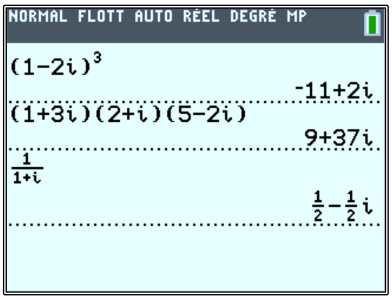
Déterminer alors la forme algébrique des nombres suivants.

- $z = 2(5 - 3i)$
- $z = 10 - 6i$
- $z = 4i(2 + 5i)$
- $z = -20 + 8i$
- $z = (2 + 7i)(5 + 4i)$
- $z = -18 + 43i$
- $z = (5 + 3i)^2$
- $z = 16 + 30i$

Avec la Ti-83 :

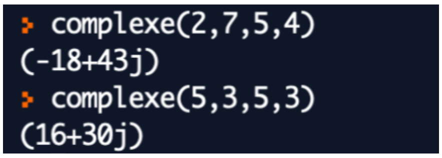
Mettre sous forme algébrique :

- $z = (1 - 2i)^3$
- $z = -11 + 2i$
- $z = (1 + 3i)(2 + i)(5 - 2i)$
- $z = 9 + 37i$
- $z = \frac{1}{1+i}$
- $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$



Avec Python :

```
def complexe(a,b,c,d):
    z1 = complex(a,b)
    z2 = complex(c,d)
    z3 = z1*z2
    return (z3)
```



Remarque :

Attention, l'affichage Python n'utilise pas i mais j. C'est la même notation que pour la physique. Ce qui va poser un problème puisque j est un nombre complexe particulier.

Vocabulaire :

Soit $z = a + ib$ avec a, b réels, un nombre complexe.
Le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ est appelé ***le conjugué de*** z.

Exemple :

Soit $z = 3 + 5i$, alors $\bar{z} = 3 - 5i$

Méthode :

Le conjugué permet de faire « disparaitre » les imaginaires au dénominateur.

- $z = \frac{1}{1+3i}$
- $z = \frac{(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$
- $z = \frac{1}{10} - \frac{3i}{10}$

- $z = \frac{5+2i}{5-3i}$
- $z = \frac{(5+2i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}$
- $z = \frac{19}{34} + \frac{25i}{34}$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z', on a:
•$\bar{\bar{z}} = z$. On dit que la relation de conjugaison est involutive.
•Pour tout entier naturel n, $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
•$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
•Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$
•$z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2Im(z)$
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Remarque :

Le conjugué est utilisé pour mettre une expression sous forme algébrique comme les exemples précédents. On dit qu'on multiplie par l'expression conjuguée. Cependant, on peut parfois s'en sortir avec un peu d'astuce et de flair si les coefficients sont croisés par exemple.

Exemples :

$z = \frac{7+6i}{6-7i}$ On met i en facteur au numérateur. $z = \frac{i(6-7i)}{6-7i}$ On a simplement $z = i$.
$z = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i}$ On met $i\sqrt{3}$en facteur au numérateur et on a : $z = \frac{i\sqrt{3}(-i+\sqrt{3})}{\sqrt{3}-i}$ soit $z = i\sqrt{3}$

Exemples :

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

- $\overline{i(9+3i)} = -i(9-3i) = -3-9i$
- $\overline{\left(\frac{2-3i}{8+5i}\right)} = \frac{2+3i}{8-5i} = \frac{1+34i}{89}$

```python
z1 = complex(0,1)*complex(9,3)
z2 = complex(2,-3)/complex(8,5)
print(z1.conjugate())
print(z2.conjugate())
```

```
(3-9j)
(0.011235955056179775+0.38202247191011235j)
```

Exercice :

On donne $Z = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2$ Ce nombre Z est-il réel ?

Solution :

On cherche le conjugué de Z.
$\bar{Z} = \overline{z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2} = z\bar{z} - i\bar{z} + iz + 2$. Donc puisque $Z = \bar{Z}$, Z est un réel.

3) Résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est déterminer le nombre qui, mis à la place de la lettre vérifie l'équation. C'est la même méthode lorsque la variable est complexe.
On ne s'intéresse ici qu'aux équations du premier degré, en z ou en $\bar{z}$

a) Équations avec z

On résout ces équations comme une équation dans $\mathbb{R}$ en isolant la variable.

Exemples :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- $(3+5i)z = 1 + iz$
- $(3+4i)z = 1$
- $z = \frac{1}{3+4i}$
- $z = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$
- $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{3}{25} - \frac{4i}{25}\right\}$

- $z - 5 = 3iz + 10i$
- $(1-3i)z = 5 + 10i$
- $z = \frac{5+10i}{1-3i}$
- $z = \frac{-25}{10} + \frac{25i}{10}$
- $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-5}{2} + \frac{5i}{2}\right\}$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): \frac{z+1}{z-2} = i$
Il faut tout d'abord évaluer le domaine d'existence. L'équation existe si $z \neq 2$
On transfère dans le même membre : $\frac{z+1}{z-2} = i \Leftrightarrow \frac{z(1-i)+1+2i}{z-2} = 0$
On résout alors $z(1-i) + 1 + 2i = 0$ soit $z = \frac{-1-2i}{1-i}$. Grâce au conjugué, $z = \frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$
Ainsi, $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right\}$

b) Équation avec $\bar{z}$

Lorsque l'équation comprend des $\bar{z}$, on repasse à la forme algébrique en introduisant deux variables.

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): \bar{z} - 5 + i = -2(z - 2 - 3i)$
On pose $z = x + iy$ et donc $\bar{z} = x - iy$
$(E): x - iy - 5 + i = -2(x + iy - 2 - 3i)$
On regroupe alors réels et imaginaires. (E) devient alors :
$(E): 3x - 9 + i(y - 5) = 0$
Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls
$\begin{cases} 3x - 9 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ et on a : $S_{\mathbb{C}} = \{3 + 5i\}$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z\bar{z} = 2z + 3 + 4i$
On pose $z = x + iy$ et donc $\bar{z} = x - iy$
$(E): (x + iy)(x - iy) = 2(x + iy) + 3 + 4i$ soit en développant :
$(E): x^2 + y^2 - 2x - 2iy - 3 - 4i = 0$ soit $(E): x^2 + y^2 - 2x - 3 + i(-2y - 4) = 0$
Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls
$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ -2y - 4 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$
On a donc $S_{\mathbb{C}} = \{1 - 2i\}$

Remarque :

On ne peut pas prévoir à l'avance le nombre de solution de l'équation comme dans $\mathbb{R}$ par exemple. On aurait pu ici avoir au final 4 solutions.

4) Formule du binôme de Newton

a) La formule du binôme de Newton

La notion de coefficient binomial et le triangle de Pascal ont été abordé en Terminale Spécialité au chapitre combinatoire et dénombrement. Leur maitrise est nécessaire pour aborder cette dernière partie.

Rappel :

- Si $0 \leq k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- Si $0 \leq k \leq n$. Le triangle de Pascal donne : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Formule :

Soient a et b deux nombre complexes :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Remarque :

Pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration :

La démonstration met en jeu un raisonnement par récurrence, enseigné en spécialité.
On note $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$

Initialisation :

Pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1$ d'une part, $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k\, b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$
P_0 est vraie, la propriété est initialisée.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et on veut montrer :

$$P_{n+1} : (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

On évalue $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b)$
On injecte alors l'hypothèse de récurrence : $(a+b)^{n+1} = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$

$$(a+b)^{n+1} = a \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

On sort les termes extrêmes

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

On réindexe alors les deux sommes pour faire apparaitre les mêmes bornes.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n+1-k} + a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

On regroupe alors les deux sommes et on factorise :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k\, b^{n+1-k}$$

A l'aide du triangle de Pascal, on a : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

P_{n+1} est vraie, la propriété est héréditaire.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

b) *Application aux nombres complexes*

Une bonne connaissance des coefficients binomiaux (de tête ?) et de la table des puissances est requise pour pouvoir développer simplement un binôme.
Par exemple, on a : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Mais si on doit développer $(1+5i)^3$, comment faire ? Dans le supérieur, la calculatrice ne sera plus la solution…

Tables des premières puissances :

2	3	4	5
4	9	16	25
8	27	64	125
16	81	256	625
32	243	1024	3125

Puissances de i :

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

On va calculer les puissances de i afin d'observer le phénomène.
On remarque qu'à la puissance 4, on retombe sur 1. Il y a donc une périodicité des puissances de i.
Ceci va nous permettre de calculer des binômes avec des nombres complexes.

Exemples :

Donner les binômes suivants sous forme algébrique.

- $(1+i)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3$ soit $(1+i)^3 = -2 + 2i$
- $(1-i)^3 = 1^3 - 3i + 3i^2 - i^3$ soit $(1-i)^3 = -2 - 2i$

Remarque :

$(1-i)^3 = \overline{(1+i)^3}$. La réponse ci-dessus est donc bien cohérente.

Exercices :

Donner les binômes suivants sous forme algébrique.

- $(2+3i)^4 = 2^4 + 4 \times 2^3 \times 3i + 6 \times 2^2 \times 3^2 i^2 + 4 \times 2^1 \times 3^3 i^3 + 3^4 i^4$
  $(2+3i)^4 = 16 + 96i - 216 - 216i + 81$
  $(2+3i)^4 = -119 - 120i$
- $(5-2i)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times 2i + 3 \times 5 \times 2^2 i^2 - 2^3 i^3$
  $(5-2i)^3 = 125 - 150i - 60 + 8i$
  $(5-2i)^3 = 65 - 142i$

On sent bien que cela peut vite s'emballer. On ne calculera pas des puissances trop élevées.