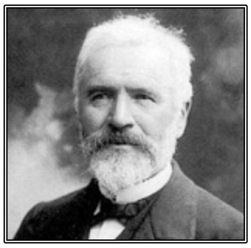
Dérivation et convexité

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu les propriétés algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction *f* à partir de la donnée des tableaux de variations de *f*, f' ou f''.
- Lire sur une représentation graphique de *f*, f' ou f'' les intervalles ou *f* est convexe, concave, ou les points d'inflexion.

Le mathématicien du chapitre :

Camille Jordan (1838 – 1922) est un mathématicien français connu pour son travail sur les groupes mais surtout en analyse. On lui doit notamment l'inégalité de Jordan :$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq sin(x) \leq x$ issue de la concavité de la fonction sinus. D'autres mathématiciens comme Jensen ou Holder ont travaillé sur des inégalités liant convexité et barycentres par exemple.



1) Rappel sur la dérivation

a) Le nombre dérivé

Définition :

On dit que *f* est dérivable en x_0 lorsque le nombre $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre limite est appelé nombre dérivé de *f* en x_0

On note alors $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Remarque :

La dérivabilité est donc une notion locale, c'est à dire différente en chaque point du domaine

Exemple : avec une fonction du second degré

On donne la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x) = x^2 + 5x - 1$
Étudier la dérivabilité de *f* en $x_0 = 3$

Solution :

On évalue d'abord :
$f(3) = 23$ puis $f(3+h) = (3+h)^2 + 5(3+h) - 1$ soit $f(3+h) = h^2 + 11h + 23$
On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de *f* en 3.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{h^2+11h+23-23}{h} = h + 11$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers 11. Ce nombre est réel et on peut donc conclure que *f* est dérivable en 3 et que $f'(3) = 11$

b) L'équation de la tangente

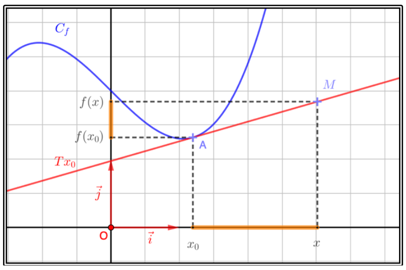
Définition :

La tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse x_0 est la droite passant par *A* et de coefficient directeur $f'(x_0)$

Définition :

Soit *f* une fonction dérivable en un point x_0.
La tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$T_{x_0}: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Démonstration :

Par définition, la tangente a pour coefficient directeur $f'(x_0)$ donc son équation réduite s'écrit : $y = f'(x_0)x + p$. Le point $A(x_0, f(x_0))$ étant un point de la tangente, ses coordonnées vérifient l'équation réduite soit $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + p$. On isole alors p et on remplace sa valeur dans l'équation réduite : $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$
Soit en factorisant $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

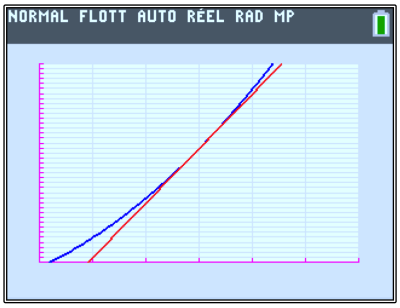
Exercice :

On reprend la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x) = x^2 + 5x - 1$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 3$

Solution :

On remplace ensuite dans l'équation de la tangente $T_3: y = f'(3)(x - 3) + f(3)$
Soit ici $T_3: y = 11x - 10$

On vérifie toujours que l'équation trouvée est bien celle de la tangente sur la TI-83.
Attention cependant à adapter la fenêtre autour du point de tangence. Aller voir les Fiches TI pour plus de précision.



c) *Sens de variation*

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I*.
• Si $f' \geq 0$ sur *I*, alors *f* est croissante sur *I*.
• Si $f' \leq 0$ sur *I*, alors *f* est décroissante sur *I*.

Exemple :

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^3$. *f* est dérivable sur ℝ et on a $f'(x) = 3x^2$.
$f' \geq 0$ sur ℝ donc *f* est croissante sur ℝ

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert *I* et $x_0 \in I$
Si *f* admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

La réciproque de ce théorème est évidemment fausse. Voir la fonction $x \mapsto x^3$

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle ouvert *I* et $x_0 \in I$.
Si f' s'annule en x_0 en ***changeant de signe,*** alors $f(x_0)$ est un extremum local de *f*.

Exemple :

C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto x^2$ en $x_0 = 0$

d) Formules de dérivation usuelles

On peut trouver pour chaque fonction l'expression de sa dérivée sur son domaine de définition. On a donc le tableau des dérivées usuelles qui sont à connaître par cœur.

Fonctions f	*Domaine de définition*	*Domaine de dérivabilité*	*Fonctions dérivées*
$f(x) = k \quad k$ réel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = ln(x)$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -sin(x)$
$f(x) = sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = cos(x)$

e) Opérations et dérivations

Une fonction étudiée à partir de la première n'est jamais une fonction usuelle. C'est pourquoi il faut connaître les propriétés suivantes qui vont permettre de calculer la dérivée de n'importe quelle fonction.
Soient *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*, ne s'annulant pas sur *I* pour *v*.

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$

Remarque :

Ci-dessus, *k* est appelée constante multiplicative.

Exemples :

- *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 7x - 1$. On a directement : $f'(x) = 6x + 7$
- *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5x + 3)(7 - 4x)$
  On pourrait développer l'expression et calculer la dérivée termes à termes.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :
  $$u(x) = 5x + 3 \qquad v(x) = 7 - 4x$$
  $$u'(x) = 5 \qquad v'(x) = -4$$
  On a alors $f'(x) = -4(5x + 3) + 5(7 - 4x)$
  Soit donc $f'(x) = -40x + 23$

2) *Composition de fonctions*

a) *Composer deux fonctions*

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$. Cette fonction peut être perçue comme la composée de deux fonctions u et v. Cette décomposition n'est pas unique. Par exemple, en posant $u(x) = x^2 + 4$ et $v(x) = \frac{1}{x}$, alors en mettant u dans v, on obtient f. On peut aussi décomposer f en posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x+4}$,

Définition :

Soit f une fonction définie sur l'ensemble D_f et g une fonction définie sur l'ensemble D_g telles que pour tout $\forall x \in D_f$, $f(x) \in D_g$. On appelle fonction composée de f par g, la fonction notée gof, définie par : $\forall x \in D_f$, $gof(x) = g(f(x))$.

Schéma de composition :

On applique d'abord la fonction f puis la fonction g.
L'image de x par f devient alors la variable pour la fonction g.

$$gof : x \overset{f}{\mapsto} f(x)$$
$$X \overset{g}{\mapsto} g(X)$$

Application :

Soient les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x - 5$.
Alors on a les compositions suivantes :
$gof(x) = g(x^2) = 2x^2 - 5$. On dit qu'on met f dans g.
$fog(x) = f(2x - 5) = 4x^2 - 20x + 25$. On dit qu'on met g dans f.

Remarques :

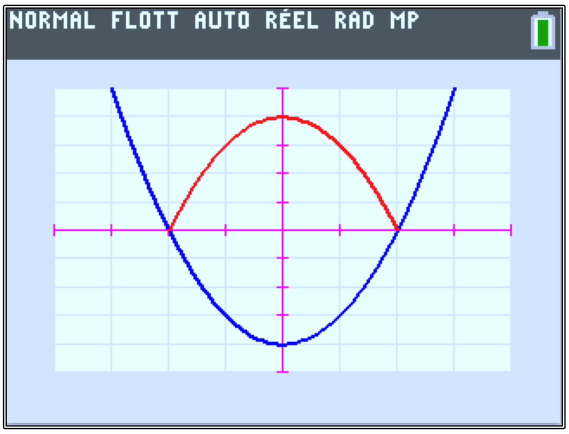
- En général $gof \neq fog$ comme le prouve l'exemple ci-dessus.
- La fonction gof est définie $\forall x \in D_f$, $f(x) \in D_g$. Ainsi, si f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $g(x) = \frac{1}{x-2}$, alors gof est définie sur $[0; +4[\cup]4; +\infty[$ avec $gof(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$

Cas particulier :

On compose avec la fonction valeur absolue.
Soient $f : x \mapsto x^2 - 4$ et $g : x \mapsto |x|$, la fonction gof est définie sur $\mathbb{R}$ par $gof(x) = |x^2 - 4\,|$.
On a alors l'expression de la composée:

$$gof(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \; si \; x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ -x^2 + 4 \; si \; x \in [-2; 2] \end{cases}$$

Par conséquent C_f et C_{gof} coïncident sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$
Sur$[-2; 2]$, C_{gof} se déduit de C_f par symétrie avec l'axe des abscisses



b) *Dériver une composée de fonctions*

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que la composée vou soit bien définie.
Si u est dérivable sur I et v dérivable sur J, alors la fonction vou est dérivable en tout réel x tel que $u(x) \in J$ et $(vou)'(x) = u'(x) \times (v'ou)(x)$

Remarque :

Il est plus simple de retenir : dérivée de l'intérieur multipliée par la dérivée de la fonction appliquée à l'intérieur. En apprenant bien cette phrase, on retrouve toutes les formules de dérivées de fonctions composées.

Exemples :

- g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x^2)$, alors $g'(x) = 2xf'(x^2)$
- h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(2x)$, alors $h'(x) = 2f'(2x)$
- k est définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = f(-x)$, alors $k'(x) = -f'(-x)$
- On a ainsi par exemple $(e^{-x})' = -e^{-x}$

c) *Formules usuelles*

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées à toutes les fonctions usuelles, on obtient un tableau similaire à celui vu au-dessus. Sans se soucier ici du domaine de définition ou de dérivabilité de u, on a :

Fonctions	Dérivées
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u^n}$	$\frac{-n \times u'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u' \times e^u$
$ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$cos(u)$	$-u' \times sin(u)$
$sin(u)$	$u' \times cos(u)$

Exemples :

- Soit $f(x) = (3x-8)^5$, définie sur $\mathbb{R}$. f est de la forme u^n avec $u(x) = 3x - 8$
  Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 15 \times (3x-8)^4$
- Soit $f(x) = \frac{1}{(2x-6)^5}$, définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$. f est de la forme $\frac{1}{u^n}$ avec $u(x) = 2x - 6$
  Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}, f'(x) = \frac{-10}{(2x-6)^6}$
- Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$
  Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
- Soit $f(x) = ln(e^{3x}+4)$, définie sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $ln(u)$ avec $u(x) = e^{3x} + 4$
  Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+4}$

d) *Dérivées $n^{ième}$*

En mathématiques, on est amené à dériver plusieurs fois de suite une fonction (pour étudier sa convexité par exemple). On peut donc dériver de manière répétée une fonction. On les appelle dérivée seconde, dérivée troisième, …, dérivée $n^{\text{ième}}$

Soit $f(x) = cos(x)$. On peut calculer les dérivées successives de la fonction cosinus.

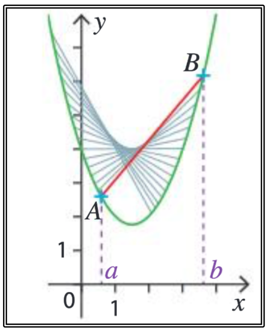
$f'(x) = -sin(x)$
$f''(x) = -cos(x)$
$f^{(3)}(x) = sin(x)$
$f^{(4)}(x) = cos(x)$

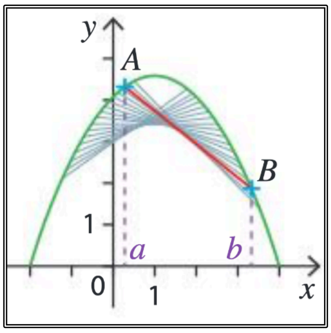
On pourrait montrer par un raisonnement par récurrence simple que :
$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = cos(x + n\frac{\pi}{2})$

3) Fonctions convexes

a) Approche graphique

On rappelle qu'une corde est un segment reliant deux points d'une courbe





Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

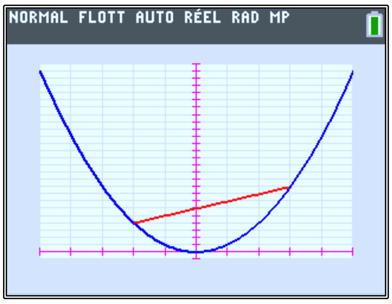
- f est convexe sur I si pour tout couple de points A et B de $(\mathcal{C})$, la corde (AB) est située au-dessus de la portion de courbe entre A et B.
- f est concave sur I si pour tout couple de points A et B de $(\mathcal{C})$, la corde (AB) est située en dessous de la portion de courbe entre A et B

Remarques :

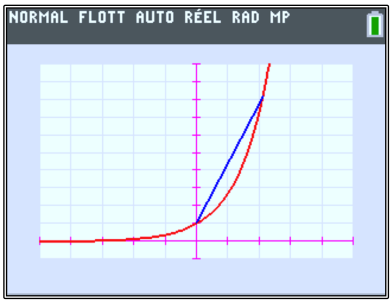
- Il est indispensable de préciser un intervalle. Une fonction peut être convexe sur $[2; 3]$ puis concave sur $[3; 8]$.
- Il ne suffit pas de trouver une corde pour affirmer la convexité ou concavité. La propriété doit être vraie pour toutes les cordes.
- On a coutume de dire qu'une fonction concave regarde vers la cave, donc en bas.
- Attention à ne pas confondre variations de f et convexité de f.

b) Convexité des fonctions usuelles

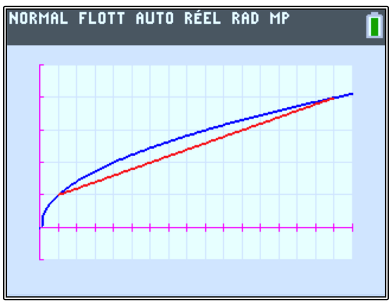
Avec la définition vue ci-dessus, on peut déterminer la convexité de quelques fonctions usuelles enseignées au lycée.



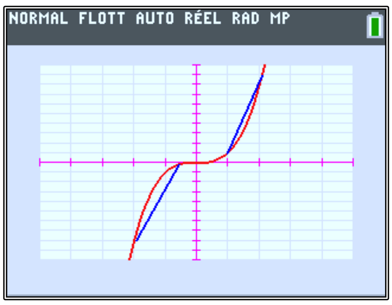
La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$



La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$



La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$



La fonction cube est concave sur $]-\infty; 0]$et convexe sur $[0; +\infty[$

c) Point d'inflexion

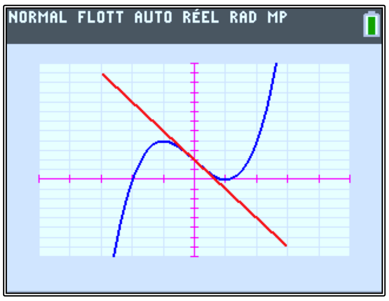
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative et A un point de $(\mathcal{C})$.
A est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$ si la tangente en A à $(\mathcal{C})$ traverse la courbe en A.

Exemples :

Sur les fonctions usuelles ci-dessus, la fonction cube possède un point d'inflexion au point A d'abscisse nulle. On dit que la courbe tourne sa concavité en A.

Sur l'exemple ci-contre, la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse nulle mais la tangente n'est pas horizontale. Elle traverse la courbe en 0.



4) Convexité et dérivation

a) Signe de la dérivée seconde

Propriétés :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I,
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I.
- f' est croissante sur I.
- f'' est positive sur I

Remarque :

- Il y a les mêmes équivalences pour une fonction concave, de dérivée seconde négative.
- La recherche de la convexité s'apparente donc à la recherche d'un signe.

Exemple :

On donne la fonction $f(x) = -3x^2 + 5x - 7$ définie sur $\mathbb{R}$. Un calcul rapide donne :
$f'(x) = -6x + 5$. f' est une fonction affine décroissante donc f est concave sur $\mathbb{R}$
$f''(x) = -6$. f''est négative sur $\mathbb{R}$ donc f est concave sur $\mathbb{R}$

b) Convexité et tangente

On peut caractériser la convexité par la position de la courbe avec ses tangentes. Cette propriété donne naissance à de nombreuses inégalités.

Propriétés :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative
Si f est convexe sur I, alors $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de toutes ses tangentes

Démonstration :

On suppose que f est convexe. Soit $x_0 \in I$. On rappelle : $T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
On note $d(x) = f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)$ l'écart entre $(\mathcal{C})$ et la tangente en x_0
On a : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. f est convexe sur I donc f' est croissante sur I.
$d'(x_0) = 0$. Ainsi on a :

- Si $x \leq x_0$, $d'(x_0) \leq 0$
- Si $x \geq x_0$, $d'(x_0) \geq 0$

La fonction d est donc décroissante sur $]-\infty; x_0] \cap I$ et croissante sur $[x_0; +\infty[\cap I$.
Puisque $d(x_0) = 0$, le minimum de d est atteint en x_0 et il vaut 0. d est donc positive sur I
$\forall x_0 \in I, f(x) - \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right) \geq 0$ soit $f(x) \geq \left(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right)$
$(\mathcal{C})$ est donc située au-dessus de toutes ses tangentes

c) *Rechercher un point d'inflexion*

La technique la plus simple pour déterminer un point d'inflexion consiste à déterminer les nombres sui annulent la dérivée seconde en changeant de signe.
On donne $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x + 7$
En dérivant deux fois, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 12x^2 - 30x + 18$. Un rapide calcul de discriminant donne deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.
La courbe présente donc deux points d'inflexion dont les abscisses sont $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$
Parfois, après avoir dérivé deux fois, la recherche du signe de la dérivée seconde est compliquée, voir infaisable algébriquement…

Soit la fonction définie sur $[-2; 2]$ par :
$f(x) = xe^x - 2x^2$.
Un calcule simple de dérivée donne :

$$\forall x \in [-2; 2], f''(x) = (x + 2)e^x - 4$$

Trouver le signe de f'' de manière algébrique s'avère ici difficile car il faut dériver une troisième fois puis construire le Tableau de variation et enfin utiliser le TVI…
On peut utiliser un algorithme et chercher pas à pas le nombre qui fera changer le signe de la dérivée seconde de f.

```python
from math import *

def fseconde(x):
    return((2+x)*exp(x)-4)

def inflexion():
    x = -2
    while fseconde(x)<=0:
        x = x +0.01
    x1 = round(x-0.01,2)
    x2 = round(x,2)
    print("l'abscisse de I est comprise entre:")
    return x1,x2
```

```
> inflexion()
l'abscisse de I est comprise entre:
(0.47, 0.48)
```

d) *Inégalités de convexité*

Exemple 1 :

On sait que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive.
On a la tangente en 0, donnée par l'équation : $T_0 : y = x + 1$
La convexité de exp donne : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
On peut grâce au théorème de comparaison retrouver que $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$

Exemple 2 :

La fonction ln est concave sur $]0; +\infty[$ car sa dérivée est décroissante sur $]0; +\infty[$.
La tangente en 1 est donnée par : $T_1 : y = x - 1$
La concavité de ln donne : $\forall x \in]0; +\infty[\,, lnx \leq x - 1$