Arithmétique

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Multiples, diviseurs, nombres pairs et impairs.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.
- Résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiples, de diviseurs, de nombres pairs, de nombres premiers.

Le mathématicien du chapitre :

Ératosthène de Cyrène (-276 ; -194) est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec. Il se laissa mourir de faim car devenu aveugle, il ne pouvait plus observer les étoiles. Il détermina la circonférence de la terre très proche de la réalité. Il mit au point le crible qui porte son nom qui permet de lister les nombres premiers dans l'ordre.

1) *Multiples et diviseurs*

a) *Multiples et diviseurs*

Définition :

a désigne un nombre de $\mathbb{Z}$ et b un nombre de $\mathbb{N}$ avec b non nul.
Dire que a est un multiple de b signifie qu'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $a = bk$
On dit aussi que b est un diviseur de a.

Remarques :

- 0 est un multiple de tout nombre b de $\mathbb{N}$
- Tout nombre a de $\mathbb{Z}$ est multiple de 1.

Exemples :

- -8 est un multiple de 4. En effet, on a : $-8 = -2 \times 4$
- 5 n'est pas un diviseur de 2 car $-5 = -2 \times 2{,}5$ et $2{,}5 \notin \mathbb{Z}$

Propriété :

Soit b un nombre de $\mathbb{N}$ avec b non nul.
La somme de deux multiples de b est aussi un multiple de b.

Exemple :

Déterminer l'ensemble des diviseurs de 48

Méthode :

On détermine de tête l'ensemble des diviseurs en construisant cet ensemble par les deux « bouts ». Il suffit de chercher les diviseurs jusqu'à la racine carrée du nombre. La découverte d'un diviseur induit la découverte d'un deuxième diviseur : $48 = 16 \times 3$. L'ensemble se construit jusqu'à se rejoindre au milieu.

$div(48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$

Exercice :

Déterminer de tête l'ensemble des diviseurs des nombres ci-dessous.

$div(35) = \{1; 5; 7; 35\}$
$div(100) = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$
$div(13) = \{1; 13\}$

b) *Nombres premiers*

- ***Définition***

Définition :

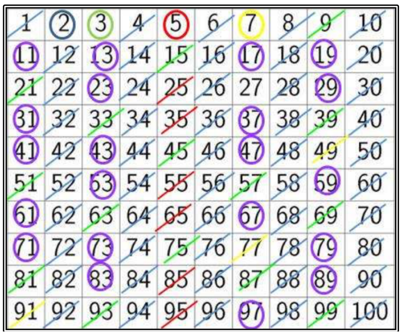
Un nombre premier est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs.

Exemples :

- 13 est un nombre premier.
- 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur.
- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par tous les entiers non nuls.
- 48 n'est pas un nombre premier.

- ***Le crible d'Ératosthène***

C'est un procédé qui permet de donner tous les nombres premiers. Il procède par élimination de tous les multiples d'un entier donné. A la fin, il ne reste que les nombres entiers qui ne sont multiples de personne : les nombres premiers.
Ci-contre, une représentation colorée du crible. Les nombres premiers sont matérialisés par un cercle violet.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- ***Les critères de divisibilité***

Ce sont l'ensemble des règles qui permettent (en un rapide coup d'œil) de savoir si on peut diviser un nombre. Un élève de seconde doit connaître le critère de divisibilité par : 2, 3,5, 9,10, et 11. Il en existe évidemment d'autres.

Définition :

Un nombre entier relatif est divisible par :
2 lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, 8.
3 lorsque la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.
9 lorsque la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9.

Exemples :

- 128 est divisible par 2
- 321 est divisible par 3
- 1245 est divisible par 5 mais aussi par 3 donc est divisible par 15.
- 1342 est divisible par 11.

- ***Nombres premiers entre eux***

Définition :

Deux nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont qu'un seul diviseur en commun, 1.

Remarques :

- Les nombres ne sont pas nécessairement premiers pour être premiers entre eux.
- Par contre, deux nombres premiers sont nécessairement premiers entre eux.

Exemples :

Les nombres 35 et 100 sont-ils premiers entre eux ? Ils sont dans la table de 5 donc non.
Les nombres 13 et 39 sont-ils premiers entre eux ? 39 est un multiple de 13 donc non.
Les nombres 72 et 35 sont-ils premiers entre eux ? $div(35) = \{1; 5; 7; 35\}$
$div(72) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$ Le seul diviseur commun est 1.

c) Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

Méthode :

On teste tous les nombres premiers dans l'ordre croissant en simplifiant autant de fois que nécessaire à chaque fois le nombre initial. Même si cela semble plus simple de diviser par un grand nombre, il est plus sûr de prendre les diviseurs dans l'ordre.

Exemple :

84 est divisible par 2 : On a :$84 = 2 \times 42$
42 est divisible par 2 : On a :$42 = 2 \times 21$
21est divisible par 3 : On a :$21 = 3 \times 7$
7 est divisible par 7 : On a :$7 = 7 \times 1$
On a donc au final : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Exercice :

Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 2520. $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 2450. $2450 = 2 \times 5^2 \times 7^2$
Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 429. $429 = 3 \times 11 \times 13$

d) Fraction irréductible

Définition :

Une fraction est dite irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur en commun autre que 1.

Méthode :

Pour rendre une fraction irréductible, plusieurs méthodes sont possibles :

- Utiliser les critères de divisibilité et simplifier la fraction en plusieurs étapes.
  $$\frac{84}{72} = \frac{42}{36} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$$
- Déterminer tous les diviseurs du numérateur et du dénominateur et simplifier la fraction par le plus grand d'entre eux commun (appelé aussi PGCD)
  $\frac{84}{72} = \frac{7}{6}$ en divisant le numérateur et le dénominateur par 12
- Décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers et simplifier tous les facteurs en commun : $\frac{84}{72} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^2} = \frac{7}{6}$

Remarque :

La fraction est irréductible car le numérateur et le dénominateur sont des nombres consécutifs. Ceci est une condition suffisante mais pas nécessaire.

2) Nombres pairs et nombres impairs

a) Définition

Définition :

On dit qu'un entier relatif est pair si c'est un multiple de 2.
Un entier qui n'est pas pair est impair.

Remarque :

2 est le seul entier pair qui soit un nombre premier.

b) Somme d'entiers

Activité introductive :

Compléter les calculs suivants :

- $5 + 7 = 12$
- $5 + 13 = 18$
- $6 + 8 = 14$
- $-5 + 7 = 2$
- $-15 - 7 = -22$
- $-10 + 22 = 12$

> ***Théorème :***
>
> La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
> La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
> La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstration :

Soient n et p deux entiers pairs. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ et tel que $p = 2k'$ On a donc : $n + p = 2k + 2k'$ soit donc $n + p = 2(k + k')$
Ainsi, $n + p$ est un nombre pair.

c) Parité d'un carré

> ***Théorème :***
>
> Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :

Soit un entier n impair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On a donc :
$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ soit en factorisant $(2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
On pose alors $K = 2k^2 + 2k$. $K \in \mathbb{Z}$ et donc $n^2 = 2K + 1$
On a ainsi que n^2 est impair.

Remarque :

Avec la même idée, le carré d'un nombre pair est pair.

3) D'autres types de raisonnement

- ***Le raisonnement par disjonction de cas***

Ce raisonnement consiste à examiner tous les cas possibles en prouvant qu'on arrive toujours à la même conclusion. Assez fréquemment, cela consiste à différencier le cas où n est pair du cas où n est impair.

Exemple :

Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n$ est pair.

Correction :

En factorisant l'expression, on remarque : $n^2 - n = n(n - 1)$
Si n est pair, alors $n - 1$ est impair et le produit $n(n - 1)$ est pair.
Si $n - 1$ est pair, alors n est impair et le produit $n(n - 1)$est pair
Donc par disjonction de cas, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - n$ est pair

- ***Le raisonnement par l'absurde***

Il consiste à supposer vraie une proposition, et à montrer que, dans ces conditions, on arrive à une absurdité.

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

<u>Correction :</u>

<u>Rappel :</u> un nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers de $\mathbb{Z}$.

On suppose donc qu'il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. On choisit ces deux entiers de telle sorte que la fraction soit irréductible. On a alors les deux égalités suivantes :

$2=\frac{p^2}{q^2}$ et donc : $p^2=2q^2$.

On peut donc affirmer que p^2 est pair et par conséquent que p est aussi pair. On peut donc écrire $p=2n$ où n est un entier.

En remplaçant alors dans l'égalité initiale, $(2n)^2=2q^2$ soit $4n^2=2q^2$ soit enfin : $2n^2=q^2$

Ce qui nous permet d'affirmer que q^2, et donc q, sont des entiers pairs.

On peut donc affirmer que $\frac{p}{q}$ n'est pas une fraction irréductible ce qui conduit à une absurdité puisque p et q ont été choisis dans ce but donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

- ***<u>Le raisonnement par contre-exemple</u>***

Lorsqu'on sait qu'une proposition n'est pas valable, le plus souvent, il suffit d'exhiber un contre-exemple qui mettra en défaut la proposition. Cette recherche d'un contre-exemple relève plus du flair mathématique que d'une démarche scientifique précise. Il faut « sentir » ce qui va coincer.

<u>Exemple :</u>

Prouver que la propriété suivante n'est pas vraie : $\forall x\in\mathbb{R},\ (x+1)^2=x^2+1$

<u>Correction :</u>

Remarquons que cette égalité est vraie pour $x=0$ mais elle est fausse si $x=1$ donc la propriété est fausse.

<u>Attention,</u> il suffit de trouver ***<u>un contre-exemple</u>*** pour réfuter une proposition mais il ne suffit pas de montrer que la proposition est vérifiée avec un exemple pour affirmer qu'elle est toujours vraie.