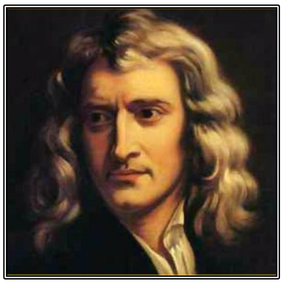
Application à la dérivation

Capacités attendues en fin de chapitre :

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extrémums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité.
- Étudier la position relative de deux courbes représentatives.

Le mathématicien du chapitre :

Isaac Newton (1642-1727) travailla en même temps que Leibnitz sur le calcul infinitésimal. Cette rivalité amena la Royal society a accuser Leibnitz de plagiat. Newton travailla également dans de nombreux autres domaines des mathématiques, une formule portant même son nom (généralisation des identités remarquables) Il toucha également à l'astronomie, la physique et l'optique.



I. Résoudre une inéquation

a) Inéquation du premier degré

- ***Résolution algébrique***

On souhaite résoudre l'inéquation du premier degré : $3x - 12 > 0$
On utilise alors les connaissances sur l'ordre afin d'obtenir les solutions
$3x - 12 > 0$ devient $3x > 12$ soit alors $x > 4$ et on a : $S =]4\,;\, +\infty[$

- ***A l'aide d'une fonction affine***

L'inéquation $3x - 12 > 0$ peut être vue comme la recherche de la position relative de la représentation graphique d'une fonction affine par rapport à l'axe des abscisses.
On pose $f(x) = 3x - 12$. La droite coupe l'axe des abscisses en 4. Puisque le coefficient directeur est positif, la fonction est croissante donc positive à partir de 4 donc $S =]4\,;\, +\infty[$

- ***Généralisation***

Si a n'est pas nul, on a alors le tableau de signe de $f(x) = ax + b$:

Cas ou $a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Cas ou $a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Méthode :

Dans la pratique, on retiendra qu'une expression $ax + b$est du signe de a à droite du 0.

b) Inéquation du second degré

Pour résoudre une inéquation du second degré, on utilise fréquemment le discriminant. Cet objet ne doit être utilisé qu'en dernier recours.

Méthode :

Si l'équation du second degré possède deux racines, on retiendra que l'expression est du signe de a à l'extérieur des racines.

Exemple :

Pour résoudre $-2x^2 + 7x - 5 < 0$, on détermine d'abord les racines à l'aide du discriminant.
On obtient aisément $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{5}{2}$. On a donc $S =]-\infty\,; 1[\cup \left]\frac{5}{2}\,;\, +\infty\right[$

Remarque :

On rappelle que > 0 se traduit en français par positif et que < 0 se traduit par négatif.

II. Variations d'une fonction

a) Notion de valeurs interdites

La notion de valeur interdite a été vue de classe de seconde. Pour rappel, il y a deux opérations interdites en classe de 1ère *Spécialité* :

- **La division par zéro**

Exemple :

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \frac{3x+1}{8x-16}$
Le numérateur n'a ici aucune influence sur le domaine de définition. La fonction est définie si et seulement si $8x - 16 \neq 0$ soit si $x \neq 2$. On a donc $D_f =]-\infty\,; 2[\cup]2\,;\, +\infty[$

- **La racine carrée d'un nombre négatif**

Exemple :

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$
La fonction est définie si et seulement si $-x^2 + 7x - 6 \geq 0$. A l'aide d'un discriminant, on obtient les racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$. Comme vu précédemment, l'expression est du signe de *a* à l'extérieur des racines donc $D_f = [1\,; 6]$ car $\sqrt{0}$ existe.

b) Sens de variation

Théorème :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$
f est croissante sur *I* si et seulement si pour tout *x* de *I*, $f'(x) \geq 0$
f est décroissante sur *I* si et seulement si pour tout *x* de *I*, $f'(x) \leq 0$,

Remarques :

- La démonstration du sens direct s'établit à l'aide du nombre dérivé mais la réciproque est plus difficile à prouver.
- On peut écrire ce théorème comme « *f* est croissante sur *I* si et seulement si pour tout *x* de *I*, $f'(x) > 0$ » mais il faut rajouter sauf peut-être en un nombre fini de points.
- Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit donc de savoir résoudre des inéquations… d'où le rappel.

Exemples :

- Déterminer les variations de $f(x) = x^3$
  On a pour tout *x* de $\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2$
  f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Cependant $f'(0) = 0$
- Déterminer les variations de $f(x) = x^3 - 3x$
  On a pour tout *x* de $\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 3$ qui se factorise en $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$
  f est donc croissante sur $]-\infty\,; -1[$ et sur $]1\,;\, +\infty[$ et décroissante sur $[-1\,; 1]$
- Déterminer les variations de $f(x) = \frac{3x+1}{8x-16}$
  D'après ce qui précède, on a $D_f =]-\infty\,; 2[\cup]2\,;\, +\infty[$
  On a pour tout *x* de D_f , $f'(x) = \frac{-56}{(8x-16)^2}$
  f est donc décroissante sur $]-\infty\,; 2[$ et décroissante sur $]2\,;\, +\infty[$

Remarque :

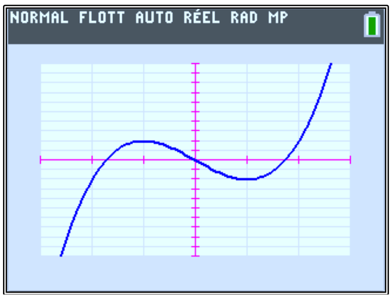
Ça n'a aucun sens de dire au lycée que *f* est décroissante sur $]-\infty\,; 2[\cup]2\,;\, +\infty[$ puisque ce n'est pas un intervalle …

c) *Exemples de tableaux de variation*

- ***Cas d'une fonction continue***

On reprend la fonction $f(x) = x^3 - 3x$ On peut donc construire son tableau de variation.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	2	↘	-2	↗	

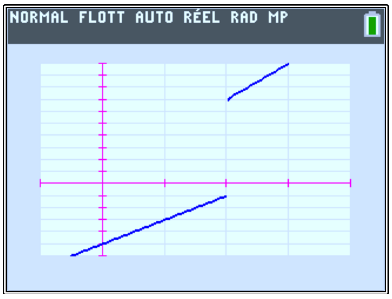


- ***Cas d'une fonction discontinue***

On donne la fonction définie par morceaux par : $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 \text{ si } x \leq 2 \\ 3x + 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

f présente une discontinuité (un saut) mais pas de valeur interdite.

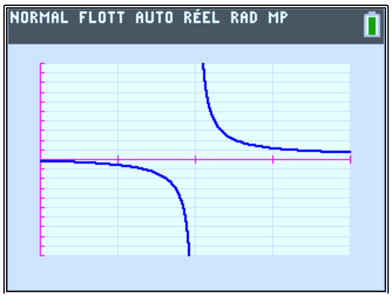
x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$		$+$
Variations de f	↗		↗



- ***Cas d'une fonction avec une valeur interdite***

On reprend la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{8x-16}$ On peut donc construire son tableau de variation.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	||	$-$	
variations de f		↘	||	↘	



Remarque :

- Ça n'a aucun sens d'écrire variation de $f(x)$ dans un tableau de variation.
- Les traits ne doivent pas apparaître dans la partie variations de f sauf en cas de discontinuité.

d) *Étudier les variations d'une fonction*

Afin d'étudier les variations d'une fonction, il convient d'appliquer la méthode suivante.

Méthode :

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est dérivable et déterminer son domaine de dérivabilité.
3) Calculer l'expression de la dérivée de f.
4) Étudier le signe de la dérivée en complétant un tableau de signe.
5) Construire le tableau de variation de f en prenant soin de compléter les valeurs exactes.

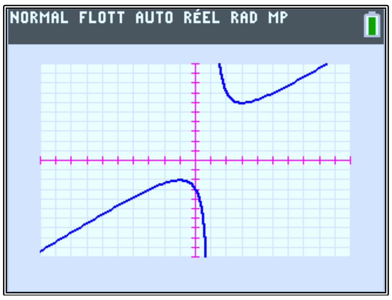
Exemple :

Étudier les variations de $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

1) f existe si $x - 1 \neq 0$ soit si $x \neq 1$. On a donc $D_f =]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$

2) f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.
3) On a alors à l'aide des formules de dérivation $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
4) Il convient d'étudier le signe de $x^2 - 2x - 3$. Les racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	



III. Extrema

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel qui n'est pas une borne de l'intervalle I.
f admet un maximum en a sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$. Le maximum vaut $f(a)$ et est atteint en a.
f admet un minimum en a sur I lorsque pour tout x de I , $f(x) \geq f(a)$.Le minimum vaut $f(a)$ et est atteint en a.

Remarque :

- Un extremum est un minimum ou un maximum
- La notion d'extremum local et d'extremum global n'est pas au programme du lycée.
- Le point a ne peut pas être une extrémité de l'intervalle I.
- Le premier extremum rencontré au lycée est le sommet de la parabole. Il est issu de la forme canonique. Sa nature (maximum ou minimum) dépend du signe de a.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un réel de l'intervalle I.
Si la fonction f admet un extremum en a sur I, alors $f'(a) = 0$

Attention :

La réciproque est fausse. Prenons par exemple la fonction $f(x) = x^3$. On a $f'(x) = 3x^2$.
$f'(0) = 0$ et pourtant, la courbe représentative n'admet pas d'extremum en 0.

Démonstration :

Démontrons la propriété dans le cas d'un maximum.
f est dérivable en a, donc on a :$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si $f(a)$ est le maximum de f sur I, intervalle ouvert, alors pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.
Donc $f(a+h) - f(a)$ est toujours négatif.

- Si $h > 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$ c'est à dire $f'(a) \leq 0$
- Si $h < 0$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$ c'est à dire $f'(a) \geq 0$

Le seul nombre positif et négatif est 0 donc $f'(a) = 0$

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et a un réel de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I.
Si la fonction f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum de f sur I

Remarque :

Pour déterminer les éventuels extrema d'une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I*, on lit dans le tableau de variation les nombres qui annulent la dérivée en changeant de signe.

Exemple :

Avec la fonction étudiée dans l'exemple précédent $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$, on voit que :

- *f* admet un maximum sur $]-\infty\,;1[$ qui vaut -2 et qui est atteint en -1
  On peut écrire : $\forall x \in \,]-\infty\,;1[, f(x) \leq -2$
- *f* admet un minimum sur $]1\,;\,+\infty[$ qui vaut 6 et qui est atteint en 3
  On peut écrire : $\forall x \in \,]1\,;\,+\infty[, f(x) \geq 6$

IV. Positions relatives de courbes

a) Définition et exemple

Définition :

Soit *I* un intervalle de ℝ et x_0 un réel appartenant à *I*. Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur *I*, de courbe représentative Cf et Cg.
- Cf est au-dessus de Cg si et seulement si, pour tout *x* de *I*, $f(x) > g(x)$
- Cf est sécante avec Cg au point d'abscisse x_0 si et seulement si $f(x_0) = g(x_0)$
- Cf est en-dessous de Cg si et seulement si, pour tout *x* de *I*, $f(x) < g(x)$

Remarque :

Ça n'a aucun sens de dire que *f* est au-dessus de *g*. De même, dire que Cf est plus grande que Cg est faux.

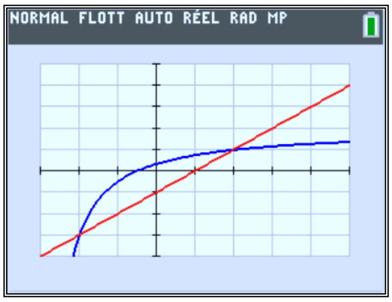
Exemple :

Déterminer la position relative de la courbe Cf et de la droite Cg sur $[-3;5]$.

Cf est au-dessus de Cg sur $]-2;2[$

Cf est en-dessous de Cg sur $]-3;-2[\,\cup\,]2;5[$

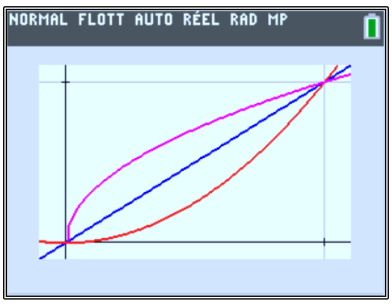
Cf et Cg sont sécantes aux points d'abscisses -2 et 2.

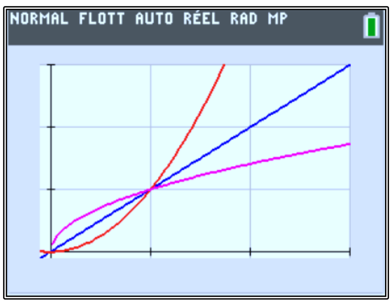


b) Les trois fonctions de références

On va étudier la position relative de trois fonctions de référence sur $[0,+\infty[$:

- La fonction carrée, notée $f(x) = x^2$ dont la représentation graphique est une moitié de Parabole sur $[0,+\infty[$:
- La fonction identité, notée $g(x) = x$ dont la représentation graphique est une droite passant par l'origine, appelée première bissectrice.
- La fonction racine carrée, notée $h(x) = \sqrt{x}$, dont la représentation graphique est la symétrie de la moitié de parabole par rapport à la première bissectrice.





Propriété :

$\forall x \in]0;1[, x^2 < x < \sqrt{x}$
$\forall x \in]1;+\infty[, \sqrt{x} < x < x^2$
Les trois courbes sont sécantes aux points d'abscisses 0 et 1.

Démonstration :

Afin d'étudier la position relative de deux courbes, on évalue la différence des deux fonctions

- On étudie le signe de $f(x) - g(x) = x^2 - x$ Il s'agit d'une fonction du second degré dont on connait les racines. On a donc immédiatement le signe de la différence grâce au premier chapitre de l'année :
  Sur $]0;1[$ $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$
  Sur $]1;+\infty[$ $x^2 - x > 0$ donc $x < x^2$
- On étudie maintenant le signe de $g(x) - h(x) = x - \sqrt{x}$. On transforme l'écriture grâce à l'expression conjuguée $g(x) - h(x) = \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}$. Après avoir développé, il vient que $g(x) - h(x) = \frac{x^2-x}{(x+\sqrt{x})}$ Le signe du numérateur a été étudié au-dessus. On peut donc conclure que :
  Sur $]0;1[$ $x - \sqrt{x} < 0$ donc $x < \sqrt{x}$
  Sur $]1;+\infty[$ $x - \sqrt{x} > 0$ donc $\sqrt{x} < x$

On peut donc recoller les inégalités afin d'obtenir la propriété ci-dessus.

Exercice :

Sans calculatrice, comparer les trois nombres $2 - \sqrt{3}$, $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et $7 - 4\sqrt{3}$

Solution :

En posant $x = 2 - \sqrt{3}$, on remarque alors que $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{x}$ et $7 - 4\sqrt{3} = x^2$
Puisque $2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$, on a d'après la propriété précédente que $x^2 < x < \sqrt{x}$
Soit en remplaçant $7 - 4\sqrt{3} < 2 - \sqrt{3} < \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

V. Dérivée de fonction composée

Activité introductive :

On souhaite dériver la fonction $f(x) = (5x - 7)^2$; f est de la forme u^2 mais on ne connait aucune formule. On utilise alors la dérivée d'un produit.
$f(x) = (5x - 7) \times (5x - 7)$ En dérivant la fonction, on obtient :
$f'(x) = 5(5x - 7) + 5(5x - 7)$ soit donc $f'(x) = 2 \times 5(5x - 7)$
En observant la fonction dérivée, on reconnait la dérivée de la fonction « intérieure ».
On a donc $f'(x) = 2 \times u'(x)u(x)$

Propriété :

On considère un intervalle *I* et *a* et *b* deux réels. Soit *J* l'intervalle formé par des valeurs prises par $ax + b$ lorsque *x* décrit l'intervalle *I*. Si g est dérivable sur *J*, alors la fonction *f* définie sur *I* par $f : x \mapsto g(ax + b)$ est dérivable sur *I* et, pour tout réel *x* de *I*, on a :

$$f'(x) = a \times g'(ax + b)$$

Remarque :

- En classe de première, on ne dérive que la composée par une fonction affine.
- On a coutume de dire qu'on fait la dérivée de l'intérieur multiplié par la dérivée de la fonction appliquée à l'intérieur.

Exemples :

Dériver les différentes fonctions suivantes.

- $f(x) = (9x + 12)^2$ avec f définie sur $\mathbb{R}$
  On a avec la formule : $f'(x) = 18(9x + 12)$
- $f(x) = (-7x + 5)^4$ avec f définie sur $\mathbb{R}$
  On a avec la formule : $f'(x) = -28(-7x + 5)^3$
- $f(x) = \sqrt{5x - 30}$ avec f définie sur $[6; +\infty[$
  On a avec la formule : $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{6x-30}}$
- $f(x) = \frac{7}{4x-12}$ avec f définie sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$
  On a avec la formule : $f'(x) = \frac{-28}{(4x-12)^2}$
- $f(x) = cos\,(x^2 + 1)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$
  On a avec la formule : $f'(x) = -2xsin\,(x^2 + 1)$

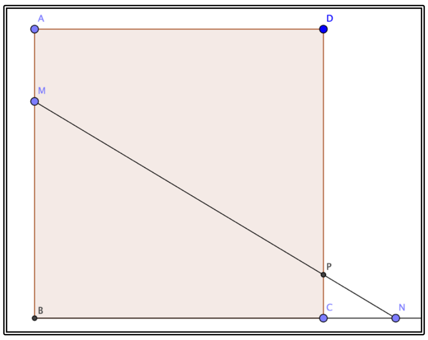
VI. Optimisation

$ABCD$ est un carré de côté 1. M est sur le segment $[AB]$.

On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi-droite $[BC)$ à l'extérieur de $[BC]$. La droite (MN) coupe (DC) en P.

On pose alors $AM = x$ avec $0 \leq x \leq 1$

1) Exprimer BM puis BN en fonction de x.
2) Montrer alors que $PC = \frac{-x^2+x}{1+x}$
3) En déduire la position du point M qui rend la longueur PC maximale.



Correction :

1) On a naturellement que $BM = 1 - x$ et que $BN = 1 + x$
2) On utilise le théorème de Thalès afin d'établir une égalité de longueurs.
   $\frac{NC}{NB} = \frac{NP}{NM} = \frac{PC}{BM}$ On remplace alors par les valeurs connues.
   $\frac{x}{1+x} = \frac{PC}{1-x}$ soit alors $PC = \frac{-x^2+x}{1+x}$
3) On étudie alors la fonction $f(x) = \frac{-x^2+x}{1+x}$
   Elle est définie sur $[0; 1]$
   On a alors $f'(x) = \frac{(1+x)(1-2x)-(-x^2+x)}{(1+x)^2}$ soit donc alors $f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(1+x)^2}$
   En utilisant le discriminant, on obtient deux racines $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$
   On construit alors le tableau de variation.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}-1$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
variations de f		$\searrow$	$3+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	

Attention, x représente une longueur et est comprise entre 0 et 1.
M doit être à une distance de $-1 + \sqrt{2}$ de A pour rendre PC maximale.