



Comment les mathématiques permettent de déterminer si frauder dans les transports en commun est une bonne idée ?

Bonjour, pour mon grand oral, vous avez choisi que je vous explique comment les mathématiques permettent de déterminer si frauder dans les transports en commun est une bonne idée. Indépendamment du côté civique et de l'honnêteté que se doit d'avoir chaque citoyen, on peut s'interroger sur la pertinence de payer les transports en regard du nombre de contrôles que l'on subit. Nous avons tous déjà vu des individus sauter au-dessus des barrières du métro par exemple ou d'autres ne pas badger en rentrant dans le tram. Mais est-ce vraiment une bonne idée, financièrement parlant.

Pour commencer, je vous propose un petit point historique sur les transports en commun en France. La première société de transport en commun a été fondée par Blaise Pascal en 1662 avec l'autorisation de Louis XIV. Elle proposait des itinéraires et des horaires fixes avec des voitures à 8 places qui parcouraient 5 routes. Cette société fonctionna avec succès jusqu'en 1679 mais s'arrêta en raison de la hausse des prix.

En 1826, l'omnibus apparaît à Nantes. Il s'agit d'une voiture à cheval pour effectuer la navette entre la ville et les bains douches qu'il a créés, situés trop loin du centre de la ville. Étrangement, il connaît le succès sur le transport mais pas pour les bains, les Nantais utilisant ce mode de transport pour se déplacer dans la ville.

Devant le succès, Baudry installe son omnibus à Paris en 1828. Il compte alors 200 employés, 89 voitures et 800 chevaux. Son fils Edmond crée la même société à Bordeaux et à Lyon. En février 1830, Baudry se suicide devant la faillite mais son entreprise survit et sera au cœur de la compagnie générale des omnibus, la future RATP.

Les transports n'ont cessé de se développer avec l'apparition des premiers tramways en 1855 puis les premiers métros en 1863 avec l'underground londonien. Pour les jeux olympiques en 1900, Paris s'équipe de métro. En 1932, 12 lignes de métro et 115 kilomètres sont creusés sous le sol de Paris.

Aujourd'hui, avec l'épuisement des ressources et le réchauffement climatique, le monde s'est engagé dans la mobilité électrique et le recours aux transports en commun est devenu une obligation.

Avec une évolution de la société, les usagers des transports en commun ont modifié leur comportement et pour certains, soit par choix, soit par manque de moyen, ne s'acquittent plus de leur billet pour participer aux frais d'utilisation.

Avant d'étudier un cas concret, nous devons d'abord mettre en place les outils mathématiques nécessaires à notre étude avec l'introduction de la loi binomiale.

Chez les Bernoulli, on était mathématicien de père en fils. La famille Bernoulli est une famille Bâloise (comme Leonhard Euler) qui a donné plusieurs mathématiciens dans



l'histoire : Jacob, Jean et son fils Daniel. Celui qui nous intéresse ici est Jacob, aussi appelé Jacques.

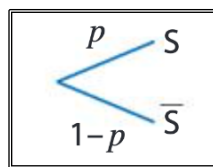
Jacques Bernoulli (1654-1705) a travaillé sur les probabilités mais aussi dans de nombreux autres domaines. Il a par exemple découvert le nombre que l'on appellera e en calculant la limite : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Il a également montré que $\sum \frac{1}{n}$ que l'on appelle la série harmonique était divergente et a participé au problème de Bâle. Il n'a pas pu trouver la valeur exacte de $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mais a réussi à prouver que cette série convergeait et avait une valeur inférieure à 2.

Son frère Jean Bernoulli (1667-1748) a lui résolu le problème de la chaînette, posé par son frère Jacques. Il travailla aussi sur les domaines physiques et fut partisan de la théorie du vortex de Descartes.

Son fils Daniel (1700-1782) était statisticien mais aussi physicien et médecin. Il travailla aussi sur l'étude de la propagation de la petite vérole en mettant en place des outils statistiques.

Après ce petit point historique, revenons à ce qui nous intéresse, c'est quoi une épreuve de Bernoulli ?

Lorsqu'on connaît les issues d'une épreuve sans savoir à l'avance laquelle va arriver, on parle d'expérience aléatoire. Lorsqu'une épreuve aléatoire comporte deux issues contraires (que l'on notera succès et échec), on parle d'une épreuve de Bernoulli. C'est le cas par exemple d'un match de tennis ou encore subir un contrôle dans les transports. On peut alors représenter cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. En notant p la probabilité du succès, on a alors $1 - p$ la probabilité de l'échec que l'on note \bar{S} .



On note alors X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. L'univers des possibles est donc $\Omega = \{0; 1\}$. On peut alors établir la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	0	1	Total
p_i	$1 - p$	p	1

Lorsqu'on répète n fois la même épreuve de Bernoulli, de manière indépendante, on construit alors un schéma de Bernoulli. Avec n épreuves, la variable aléatoire comptant alors le nombre de succès a donc pour univers $\Omega = \{0; 1; \dots, n\}$. Cette variable aléatoire suit donc une loi binomiale de paramètres n et p . On écrit alors $X \sim B(n; p)$ et on a la formule qui donne la probabilité que je vous ai noté sur mon document support.



$$\forall k \in [0; n], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

La loi binomiale donne donc la probabilité d'obtenir k succès lorsqu'on répète de manière indépendante n épreuves de Bernoulli identiques.

Ces notions mathématiques étant rappelées, on peut maintenant s'intéresser à un cas concret.

Tisséo, créé en 2002, est le réseau de transport de l'agglomération toulousaine. Le réseau met à la disposition des voyageurs 2 lignes de métro de type Val, 1 ligne de tramway, 1 téléphérique et 148 lignes de Bus.

Chaque année, la fréquentation de ce réseau augmente, ce qui, mécaniquement, rend plus sensible le phénomène de fraude mais également les comportements déviants.

Plus de 500 000 personnes sont usagers du réseau TISSEO quotidiennement. Nous allons nous intéresser à un usager qui utilise quotidiennement le réseau TISSEO pour se rendre à son travail. On peut donc considérer qu'il travaille 20 jours par mois, à raison de deux trajets par jour. Il effectue ainsi 40 trajets par mois. En considérant qu'il n'a pas d'abonnement, il paye chaque trajet 1,60 €. En cas de contrôle, si l'utilisateur est en infraction, il doit alors payer une amende de 60 €.

On suppose, et c'est très important, que les contrôles effectués sont indépendants les uns des autres. En regard des chiffres fournis par TISSEO, la probabilité de subir un contrôle dans les transports toulousains vaut 0,05.

Nous allons donc calculer, en utilisant les notions évoquées ci-dessus, si frauder tous les jours peut être intéressant financièrement pour notre usager.

Les 40 trajets sont donc 40 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On a donc construit un schéma de Bernoulli et, en regard des rappels mathématiques de la première partie, $n = 40$ et $p = 0,05$. Un succès est ici que l'utilisateur subisse un contrôle. On note alors X la variable aléatoire qui compte le nombre de contrôles subis par l'utilisateur.

On a donc $X \sim B(40; 0,05)$. Nous pouvons donc effectuer quelques calculs.

L'utilisateur ne subit aucun contrôle sur les 40 jours : $P(X = 0) \approx 0,129$

L'utilisateur subit au moins un contrôle pendant les 40 jours :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,871$$

On se rend compte que cette probabilité est très importante. Nous pouvons alors nous intéresser à une notion importante : l'espérance mathématique.



Pour une loi binomiale de paramètres , n et p , on a : $E(X) = n \times p$.

Dans notre cas concret ici, $E(X) = 2$. Une traduction simple indique que notre usager va subir en moyenne 2 contrôles par mois .

En gardant en tête notre problématique, on va utiliser la somme de variable aléatoire en posant $Z = 40 \times 1,60 - 60X$ soit en calculant $Z = 64 - 60X$.

La variable aléatoire Z correspond au gain algébrique obtenu par notre usager s'il ne paye aucun trajet pendant un mois . Il s'agit donc de la différence entre le coût des transports économisés et les amendes reçues pendant les 40 jours.

On peut alors en utilisant la linéarité de l'espérance mathématique, évaluer le gain moyen par mois.

$$E(Z) = E(64 - 60X)$$

$$E(Z) = 64 - 60E(X)$$

$$\text{Soit alors } E(Z) = -56$$

Si l'usager ne paye aucun trajet pendant les 40 jours, en moyenne, il va donc perdre 56 euros par mois. On peut donc affirmer grâce aux mathématiques que dans son cas, frauder n'est pas avantageux.

Après cette étude concrète, quelques mises en gardes s'imposent.

Bien que la loi binomiale permette de calculer certaines probabilités, elle peut être affinée dans la précision de ses résultats. Dans le cas du réseau de transport TISSEO, des méthodes ont permis d'affiner les résultats obtenu avec loi binomiale comme la méthode de Fisher et le test du khi deux notions malheureusement pas étudiées en terminales.

On peut également nuancer la probabilité d'être contrôlé. En effet, la valeur de 0,05 n'est pas la même que l'on utilise le tramway ou le métro par exemple. On pourrait affiner avec une probabilité déterminée sur chaque ligne. Il est aussi possible qu'il y ait davantage de contrôle aux heures de pointe qu'en milieu de demi-journées. Il est aussi envisageable que la probabilité d'être contrôlé différemment si on est une femme ou un homme, une jeune ou un travailleur.

Enfin le coût pour mettre en place des contrôles n'est pas anodin et rentre aujourd'hui en compte dans la direction adoptée par de nombreuses régies de transport en commun.

Pour conclure, aujourd'hui, de nombreuses agglomérations ont fait le choix de passer à la gratuité pour leurs usagers. On peut s'interroger sur les raisons de cette transformation : écologique ou financière. C'est le cas de Montpellier qui a décidé d'accorder la gratuité aux habitants de la métropole depuis janvier 2024. C'est clairement une volonté écologique et de



qualité de vie pour les habitants de la ville qui sont privilégiées puisque nous avons vu aujourd'hui que frauder dans les transports n'était pas avantageux pour un usager quotidien.