Théorème des Valeurs intermédiaires

Objectif :

Déterminer l'unique solution, assez fréquemment notée α, de l'équation $f(x) = k$. Dès que le mot unicité apparait, il faudrait invoquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé le théorème de la bijection. Cependant, on généralise en parlant de TVI.
Il faut être vigilant sur l'énoncé : demande-t-on une valeur approchée ou un encadrement de α et avec qu'elle précision ? Pour la plupart des exercices, k vaut 0.
Contrairement à des équations simples, de nombreuses équations ne peuvent pas être résolues grâce à des formules (comme Δ par exemple). Il faut alors étudier la fonction et construire son tableau de variation.

Méthode :

La chose la plus simple à gérer est de découper notre intervalle (qui peut être $\mathbb{R}$) en intervalles sur lesquels f est monotone. Il faut rappeler que (ou montrer que, ça dépend des exercices) :

- f est continue sur I.
- f est strictement monotone sur I.
- k est une valeur intermédiaire.

Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution, notée α, dans I.
La détermination de α se fait en utilisant la calculatrice avec la méthode par balayage, détaillée dans le cours ou la méthode par dichotomie et un programme Python.

Attention :

- Parfois, il faut découper l'intervalle car la fonction n'est pas strictement monotone sur I.
- Si on résout une situation concrète de type fonctions coûts, il faut prendre garde aux unités (x exprimé en centaines d'euros par exemple).
- Il faut alors faire l'effort de répondre à une question en français par une réponse en français et non pas en math…
- Le TVI est un théorème d'existence. La rédaction prouve qu'il y a une solution mais ne la donne pas. Il faut ensuite la chercher

Exemple :

Démontrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x + 4 = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Analyse de la situation :

On doit résoudre une équation de degré 3. On ne connait aucune formule. On doit donc étudier complètement une fonction et réfléchir…

Solution :

On pose, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 4$ fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. On a $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$. Un rapide calcul de discriminant donne $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{7}{3}$ On construit donc le tableau complet des variations sur $\mathbb{R}$ de f.

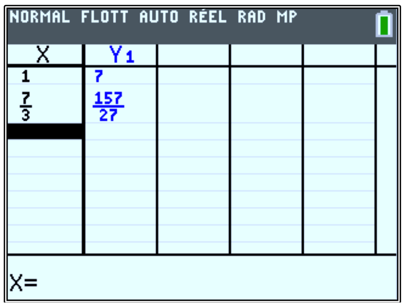
x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f	$-\infty$		7		$\frac{157}{27}$		$+\infty$

On calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition. On factorise par le terme prépondérant.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=1\end{array}\right\}\text{ par produit,}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

A l'aide de la calculatrice, on obtient les valeurs exactes pour compléter le tableau.



On découpe alors $\mathbb{R}$ afin de répondre à la question.

Sur $]1;+\infty[$, f admet $\frac{157}{27}$ comme minimum. L'équation n'admet donc pas de solution.

Sur $]-\infty\,;1[$,

- f est continue.
- f est strictement croissante.
- $f(1) > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$. 0 est donc une valeur intermédiaire.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation possède une unique solution notée α.

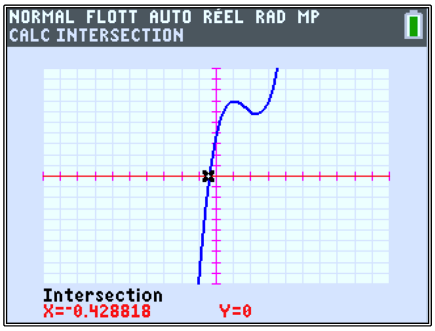
<u>Recherche de la solution :</u>

En maitrisant la TI, on peut obtenir une valeur approchée. Mais si la question est de donner un encadrement, on utilise la méthode par balayage qui consiste à réduire l'intervalle autour de la solution :

A l'unité : $-1 < \alpha < 0$

Au dixième : $-0{,}5 < \alpha < -0{,}4$

Au centième : $-0{,}43 < \alpha < -0{,}42$



<u>Exercice 1 :</u>

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction f continue sur $[-1;4]$.

x	-1	4
f	-2 ↗	6

Montrer pourquoi il existe un unique réel α de l'intervalle$[-1;4]$. tel que $f(x) = 0$.

<u>Exercice 2 :</u>

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = ln(-2x+3) + 2x$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}9$ admet une unique solution notée α
2) Donner à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2}près par défaut.

<u>Exercice 3 :</u>

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$