Lire une table de Loi Normale

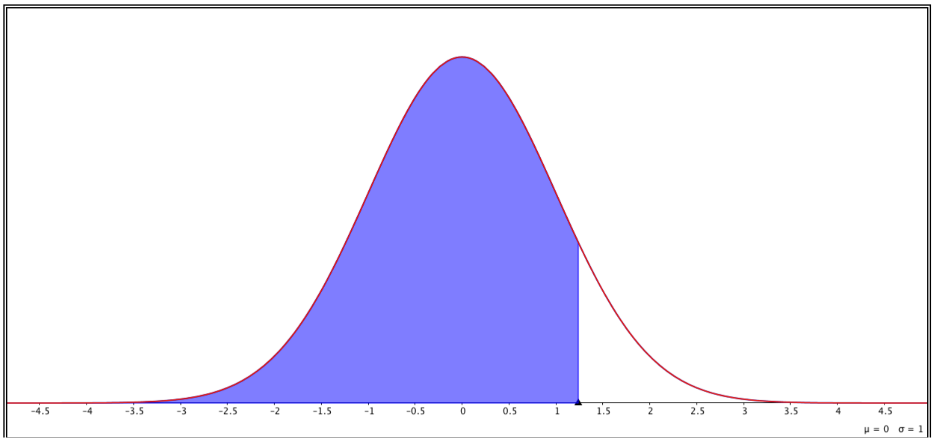
Objectif :

Etre capable de calculer des probabilités sans calculatrice rapidement à l'aide d'une table.

Méthode :

On rappelle que si X suit une loi normale ***centrée réduite***, alors sa fonction de répartition est donnée par : $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Cette fonction donne l'aire du plan délimitée par la courbe de Gauss, l'axe des abscisses et la droite verticale tracée sur le curseur comme le montre le dessin ci-dessous :



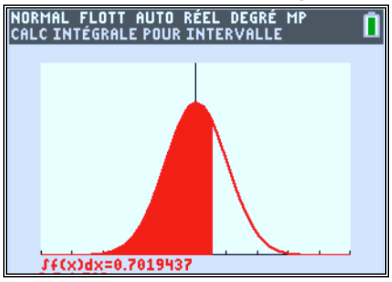
Afin de trouver une probabilité de la forme $P(X \leq x)$, on cherche donc dans la table le nombre à l'intersection d'une ligne et d'une colonne.

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Exemples :

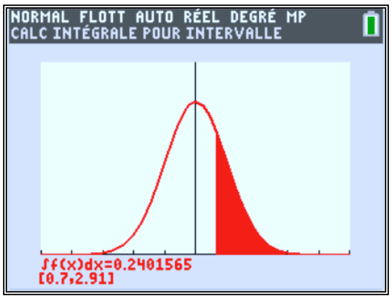
- Calculer $P(X \leq 0{,}53)$. On lit dans la table $P(X \leq 0{,}53) = 0{,}7019$. On trouve ce nombre à l'intersection de la colonne 0,03 et de la ligne 0,50.

  A la calculatrice, on trouve :



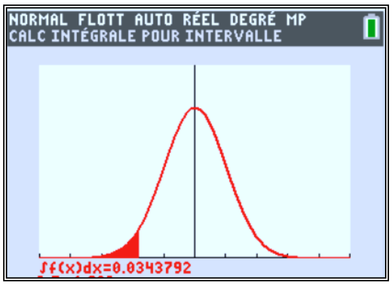
- Calculer $P(0{,}7 \leq X \leq 2{,}91)$ s'obtient en effectuant la soustraction des deux aires données par : $P(0{,}7 \leq X \leq 2{,}91) = P(X \leq 2{,}91) - P(X \leq 0{,}7)$
  Soit donc à l'aide de la table $P(0{,}7 \leq X \leq 2{,}91) = 0{,}9982 - 0{,}7580$ soit donc $P(0{,}7 \leq X \leq 2{,}91) = 0{,}2402$

  Résultat que l'on retrouve à l'aide de la calculatrice



- La recherche d'une probabilité avec un nombre négatif demande une bonne maitrise de la symétrie. Recherchons par exemple $P(X \leq -1{,}82)$.
  Pour cela, on remarque que $P(X \leq -1{,}82) = P(X \geq 1{,}82)$. En utilisant la fonction de répartition, $P(X \leq -1{,}82) = 1 - P(X \leq 1{,}82)$ soit alors $P(X \leq -1{,}82) = 1 - F(1{,}82)$
  En lisant sur la table, il vient $P(X \leq -1{,}82) = 1 - 0{,}9656$ donc $P(X \leq -1{,}82) = 0{,}0344$

  Résultat que l'on retrouve une nouvelle fois



- On peut retrouver aisément le premier critère de normalité par la table.
  $P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - (1 - P(X \leq 1))$ soit $P(-1 \leq X \leq 1) = 2P(X \leq 1) - 1$
  On lit alors $P(-1 \leq X \leq 1) = 2 \times 0{,}8413 - 1$ soit $P(-1 \leq X \leq 1) = 0{,}6826$
- Si X suit une loi normale quelconque, il faut d'abord ***<u>centrer et réduire</u>*** la variable avant d'utiliser la table. Par exemple, si X suit une $N\left(176\,;3^2\right)$, on souhaite calculer $P(X \geq 180{,}5)$

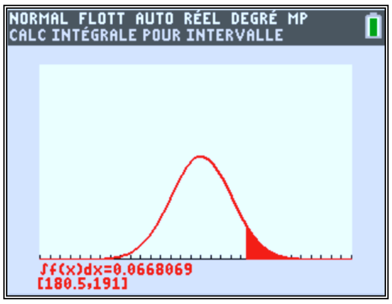
  Pour cela, on commence par centrer réduire $P(X \geq 180{,}5) = P\left(\dfrac{X-176}{3} \geq \dfrac{180{,}5-176}{3}\right)$

  $P(X \geq 180{,}5) = P(Y \geq 1{,}5)$ où Y suit une $N\left(0\,;1\right)$

  A l'aide de la fonction de répartition, $P(X \geq 180{,}5) = P(Y \geq 1{,}5) = 1 - F(1{,}5)$

  On lit donc sur la table $P(X \geq 180{,}5) = P(Y \geq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$

Soit donc $P(X \geq 180{,}5) = 0{,}0668$
Sans centrer ni réduire la variable, on peut obtenir directement le résultat à la calculatrice. On obtient évidemment la même chose.



- Connaissant la probabilité, on peut être amené à rechercher un intervalle. Par exemple, si on cherche t tel que $P(X \leq t) = 0{,}9970$, on cherche dans la table la probabilité la plus proche. On lit alors à l'intersection $P(X \leq 2{,}75) = 0{,}9970$

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $N(0\,;1)$. Calculer alors à l'aide de la table les probabilités suivantes :

- $P(X \leq 2{,}19)$
- $P(1{,}58 \leq X \leq 2{,}73)$
- $P(-2 \leq X \leq 3)$

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi $N(22\,;5^2)$. Calculer alors à l'aide de la table les probabilités suivantes :

- $P(X \geq 30)$
- $P(X \leq 21{,}9)$
- $P(23 \leq X \leq 27)$

Exercice 3 :

Dans une population, la taille des hommes, exprimée en centimètres, peut être représentée par une variable aléatoire T qui suit une loi $N(175\,;36)$

1) Déterminer la probabilité que la taille d'un homme pris au hasard dans cette population soit supérieure à 170 cm et inférieure à 180 cm.
2) En déduire la probabilité que la taille d'un homme pris au hasard soit inférieure à 170 cm et supérieure à 180 cm.

Exercice 4 :

On sait que X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(-7\,;2)$
Donner l'arrondi au millième du nombre réel t tel que $P(X \geq t) \approx 0{,}239$

Exercice 5 :

Des statistiques ont permis de considérer que, dans un pays donné, l'âge d'obtention d'un diplôme A est assimilé à une variable aléatoire qui suit la loi $N(23{,}1\,;1{,}1^2)$

1) Déterminer la probabilité qu'un diplômé de A pris au hasard ait entre 22 et 23 ans.
2) Déterminer l'âge x tel que 90 % des diplômés de A soient âgés de moins de x ans.