Raisonnement par récurrence

Objectif :

Prouver la véracité d'une propriété P_n pour tout entier naturel.

Méthode :

Il est essentiel de bien écrire la propriété au rang n, c'est-à-dire P_n. Il est surtout indispensable d'écrire la propriété que l'on souhaite démontrer lors de l'hérédité, soit P_{n+1}. Ce que j'appelle en classe le panneau Brest. Savoir en fait ce que l'on souhaite démontrer afin d'être certain d'arriver à bon port.

En fonction des exercices, la difficulté peut résider à différentes étapes :

- L'écriture même de la propriété P_n en arithmétique par exemple.
- L'initialisation si la propriété n'est vérifiée qu'à partir d'un rang élevé.
- L'écriture de la propriété au rang $n + 1$.
- La démonstration de l'hérédité.

Il existe essentiellement trois méthodes pour réussir un raisonnement par récurrence. Certains exercices peuvent être résolus par plusieurs méthodes. Cependant, certains énoncés vous mettent sur la voie. C'est en pratiquant que vous « sentirez » la méthode la plus adaptée.
Il y a aussi des exercices qui ne pourront jamais être démontrés par certaines méthodes.
Le flair, toujours le flair …
Nous avons insisté sur les verbes pour comprendre ces méthodes :

- ***Construire*** à partir de l'hypothèse de récurrence
- ***Injecter*** l'hypothèse de récurrence.
- ***Composer*** par une fonction monotone sur un intervalle donné.

Exemple 1 : *Construire à partir de l'hypothèse de récurrence*

On donne : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}25u_n + 6 \\ u_0 = 10 \end{cases}$

Démontrer par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n \geq 8$

Analyse de la situation :

Nous avons une suite définie par une relation de récurrence, un terme en fonction du précédent. Nous devons ici montrer une inégalité. Par expérience, on sent que les 3 méthodes fonctionnent ici. Nous avons choisi la méthode par construction, aussi performante qu'injecter ou composer. La démonstration d'inégalités sert fréquemment à prouver dans la question suivante les variations de la suite.

Solution :

Initialisation :

Puisque $u_0 = 10$, on a bien $u_0 \geq 8$
On a donc que ***P_0 est vraie. La propriété est initialisée.***

Hérédité :

Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $u_{n+1} \geq 8$ (?)
On construit donc à partir de l'hypothèse de récurrence :
On sait que $u_n \geq 8$. Par produit par 0,25, on a $0{,}25u_n \geq 2$. En ajoutant 6 aux deux membres, $0{,}25u_n + 6 \geq 8$ soit donc $u_{n+1} \geq 8$
On a donc que ***P_{n+1} est vraie*** ***La propriété est héréditaire.***

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 8$

<u>Exemple 2 :</u> *Injecter l'hypothèse de récurrence*

On donne : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Démontrer par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : u_n = \frac{n}{n+1}$

<u>Analyse de la situation :</u>

Nous avons ici une suite définie par une relation de récurrence. On doit trouver la formule explicite de cette suite. Injecter est ici la méthode la plus naturelle dans ce cas. Il est indispensable d'écrire la propriété au rang $n+1$ ici.

<u>Solution :</u>

<u>Initialisation :</u>

Puisque $u_0 = 0$, et $\frac{0}{0+1} = 0$ on a bien $u_0 = \frac{0}{0+1}$

On a donc que ***<u>P_0 est vraie. La propriété est initialisée.</u>***

<u>Hérédité :</u>

Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ (?)

On injecte donc l'hypothèse de récurrence dans la formule de récurrence de la suite.

$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ soit en injectant $u_{n+1} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}$. En mettant au même dénominateur, on a :

$u_{n+1} = \frac{1}{\frac{2+n}{n+1}}$ soit $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ On a donc que ***<u>P_{n+1} est vraie</u>*** ***<u>La propriété est héréditaire.</u>***

<u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1}$

<u>Exemple 3 :</u> *Composer par une fonction monotone sur un intervalle donné*

On donne : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \\ u_0 = 0{,}7 \end{cases}$ On a $f(u_n) = u_{n+1}$ avec $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$

Démontrer par récurrence la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

<u>Analyse de la situation :</u>

Il s'agit ici de montrer des inégalités qui donneront d'ailleurs les variations de la suite.
Il faut au préalable étudier les variations d'une fonction pour pouvoir l'utiliser.
Attention, parfois l'expression de la suite n'est pas une formule de récurrence et ne permet donc pas d'utiliser la composition. Par exemple, si on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$

<u>Solution :</u>

On pose au préalable, $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$, définie sur $[0; 1]$. Inutile de prendre la totalité du domaine puisque c'est sur $[0; 1]$ que nous allons travailler. f est dérivable sur $[0; 1]$. On a l'expression de $f'(x) = \frac{3}{(1+2x)^2}$. f est donc strictement croissante sur $[0; 1]$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

<u>Initialisation :</u>

Puisque $u_0 = 0{,}7$, et $u_1 = \frac{7}{8}$ On a donc que ***<u>P_0 est vraie. La propriété est initialisée.</u>***

<u>Hérédité :</u>

Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ (?)

On compose par f à partir de l'hypothèse de récurrence. Puisque f est croissante sur $[0; 1]$, l'ordre ne change pas $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$ soit en remplaçant, on a :

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ On a donc que ***<u>P_{n+1} est vraie</u>*** ***<u>La propriété est héréditaire.</u>***

<u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. (u_n) est croissante et bornée.