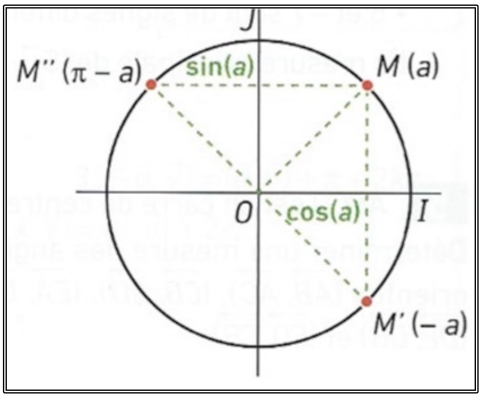
Équations trigonométriques

A l’aide des angles associés, on peut se rendre compte que si deux angles ont le même cosinus, c’est qu’ils sont soit égaux, soit opposés à un nombre de tour près.

De même si deux angles ont le même sinus, c’est qu’ils sont soit égaux, soit de somme égale à π à un nombre de tour près.
On peut donc résumer cela par les propriétés suivantes qui permettent de résoudre des équations :



Propriétés :

Soient x *et* a deux nombres réels
$cos(x) = cos(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$
$sin(x) = sin(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

Remarques :

- Attention, on peut être amené à résoudre des équations dans $\mathbb{R}$ qui présente donc une infinité de solutions ou dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui présente donc un nombre fini de solution.
- Lorsque on doit diviser l’égalité, il faut aussi penser à diviser le $2k\pi$
- On ne sait pas résoudre une équation $cos(x) = sin(a)$ mais on peut la transformer grâce aux angles associés.

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $cos(x) = \frac{1}{2}$

  On remarque donc que $cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

  On a donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

  On écrit $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \in \mathbb{Z}\right\}$

- Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ $sin(x) = sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

  On a donc $x = 3x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - (3x - \frac{\pi}{4}) + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

  On a donc $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{16} + k'\frac{\pi}{2}$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

  Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ il y aura donc 2 réponses pour la première solution et 4 réponses pour la seconde. Pour obtenir ces solutions, on remplace k et k' par des valeurs qui permettent de faire un tour complet. On écrit $S_{]-\pi\ ;\ \pi]} = \left\{\frac{\pi}{8} ; -\frac{7\pi}{8} ; \frac{5\pi}{16} ; \frac{13\pi}{16}\ ;\ \frac{-3\pi}{16}\ ;\ \frac{-11\pi}{16}\right\}$

  Remarquons que $S_{[0\ ;2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{8} ; \frac{9\pi}{8} ; \frac{5\pi}{16} ; \frac{13\pi}{16}\ ;\ \frac{21\pi}{16}\ ;\ \frac{29\pi}{16}\right\}$

  Pour les débutants, le tracé d’un cercle permet une meilleure compréhension.

- Résoudre dans $[0\ ; 2\pi[$ $sin(x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

  On transforme à l’aide des angles associés : $sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$

  $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ permet donc d’écrire :

  $\frac{\pi}{2} - x = 2x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - x = -(2x - \frac{\pi}{6}) + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

  On a donc $x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{-\pi}{3} + 2k'\pi$ avec k *et* $k' \in \mathbb{Z}$

On a donc $S_{[0\,;2\pi[} = \left\{\frac{2\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}; \frac{14\pi}{9}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $sin^2(x) - \frac{3}{2}sin(x) - 1 = 0$

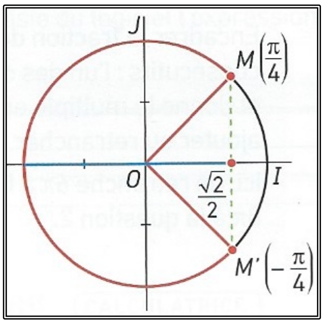
  On pose $X = sin(x)$ l'équation devient donc $X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$; A l'aide du discriminant, on a donc $sin(x) = 2$ ou $sin(x) = \frac{-1}{2}$

  La première équation étant impossible, on a donc $sin(x) = sin\,(-\frac{\pi}{6})$

  $x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k'\pi$ avec $k\ et\ k' \in \mathbb{Z}$

  On écrit $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\,;\ \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k\ et\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$

- Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ $cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$



On transforme donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\,(\frac{\pi}{4})$ On cherche donc à déterminer un ensemble de valeurs. On trace sur le cercle trigonométrique.

On a donc $S_{]-\pi\,;\,\pi]} = \left]-\pi\,;\,-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\,;\,\pi\right]$