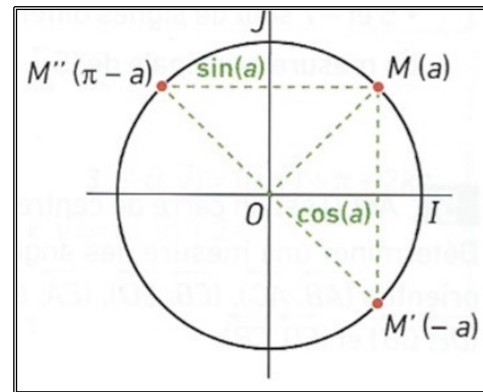


Équations trigonométriques

A l'aide des angles associés, on peut se rendre compte que si deux angles ont le même cosinus, c'est qu'ils sont soit égaux, soit opposés à un nombre de tour près.

De même si deux angles ont le même sinus, c'est qu'ils sont soit égaux, soit de somme égale à π à un nombre de tour près.

On peut donc résumer cela par les propriétés suivantes qui permettent de résoudre des équations :



Propriétés :

Soient x et a deux nombres réels

$\cos(x) = \cos(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

$\sin(x) = \sin(a)$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

Remarques :

- Attention, on peut être amené à résoudre des équations dans \mathbb{R} qui présente donc une infinité de solutions ou dans $]-\pi ; \pi]$ qui présente donc un nombre fini de solution.
- Lorsque on doit diviser l'égalité, il faut aussi penser à diviser le $2k\pi$
- On ne sait pas résoudre une équation $\cos(x) = \sin(a)$ mais on peut la transformer grâce aux angles associés.

Exemples :

➤ Résoudre dans \mathbb{R} $\cos(x) = \frac{1}{2}$

On remarque donc que $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

On a donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

On écrit $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \in \mathbb{Z} \right\}$

➤ Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ $\sin(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

On a donc $x = 3x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

On a donc $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{16} + k'\frac{\pi}{2}$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

Dans $]-\pi ; \pi]$ il y aura donc 2 réponses pour la première solution et 4 réponses pour la seconde. Pour obtenir ces solutions, on remplace k et k' par des valeurs qui permettent de faire un tour complet. On écrit $S_{]-\pi ; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{8} ; -\frac{7\pi}{8} ; \frac{5\pi}{16} ; \frac{13\pi}{16} ; \frac{-3\pi}{16} ; \frac{-11\pi}{16} \right\}$

Remarquons que $S_{[0 ; 2\pi[} = \left\{ \frac{\pi}{8} ; \frac{9\pi}{8} ; \frac{5\pi}{16} ; \frac{13\pi}{16} ; \frac{21\pi}{16} ; \frac{29\pi}{16} \right\}$

Pour les débutants, le tracé d'un cercle permet une meilleure compréhension.

➤ Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ $\sin(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

On transforme à l'aide des angles associés : $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ permet donc d'écrire :

$\frac{\pi}{2} - x = 2x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} - x = -\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

On a donc $x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{-\pi}{3} + 2k'\pi$ avec k et $k' \in \mathbb{Z}$

On a donc $S_{[0 ; 2\pi[} = \left\{ \frac{2\pi}{9} ; \frac{8\pi}{9} ; \frac{14\pi}{9} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$

➤ Résoudre dans \mathbb{R} $\sin^2(x) - \frac{3}{2}\sin(x) - 1 = 0$

On pose $X = \sin(x)$ l'équation devient donc $X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$; A l'aide du discriminant, on a donc $\sin(x) = 2$ ou $\sin(x) = \frac{-1}{2}$

La première équation étant impossible, on a donc $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On écrit } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

➤ Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

On transforme donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ On cherche donc à déterminer un ensemble de valeurs. On trace sur le cercle trigonométrique.

$$\text{On a donc } S_{]-\pi ; \pi]} = \left] -\pi ; -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{4} ; \pi \right[$$

