L'intégration par parties

Objectif :

Déterminer une primitive d'une fonction qui se présente sous la forme de produit de deux fonctions.
Pour cela on décompose la formule de la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$
En isolant, on obtient : $uv' = (uv)' - u'v$ et soit en intégrant, il vient la formule d'IPP :

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

C'est grâce à cette méthode que l'on peut trouver une primitive de la fonction ln

Méthode :

Pour réussir une bonne IPP, il faut faire le bon choix au départ. Il faut d'abord présenter convenablement vos fonctions afin d'acquérir des habitudes. Il faut poser :

dériver u	$u(x) =$	$v(x) =$	
	$u'(x) =$	$v'(x) =$	
			intégrer v'

On choisit toujours pour u la fonction que l'on souhaite faire disparaître et pour v' la fonction que l'on va intégrer.
Par exemple, la fonction exp ne disparaitra jamais (donc n'est quasiment jamais u) et on ne connaît pas une primitive du ln (donc n'est jamais v'). De même, une fonction trigonométrique de disparaitra jamais. Il faut donc avoir un peu de flair (toujours lui…). L'objectif étant de faire disparaître le produit. Même si le choix initial n'est pas bon, on peut faire une IPP. Malheureusement, on trouvera de nouveau une fonction dont on ne connaît pas de primitive.

Exemple 1 :

Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x x \mapsto xe^x$
Il s'agit d'un produit. On pose alors :

$$u(x) = x \qquad v(x) = e^x$$

$$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^x$$

On obtient donc

$$\int xe^x = [xe^x] - \int e^x$$

soit en intégrant alors la deuxième intégrale $\int xe^x = xe^x - e^x$
On a donc $f(x) = xe^x$, alors $F(x) = (x-1)e^x$

Remarques :

- C'est par hasard que $(uv)' = uv$. Ce n'est pas toujours le cas.
- On doit toujours trouver une deuxième primitive lors d'une IPP. C'est pour cela qu'il faut faire disparaître le produit afin de pouvoir déterminer cette primitive.
- On peut ensuite mélanger IPP, ajustement et fonction composée.
- Il arrive parfois qu'aucune des deux fonctions ne disparaissent en les dérivant. On effectue alors une double IPP tournante et on résout une équation.
- Attention, un produit n'induit pas nécessairement une IPP.

Exercice 1 :

Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.

1. $f(x) = x^2e^x$
2. $f(x) = xcos(x)$
3. $f(x) = xln(x)$
4. $f(x) = 4x^3ln(x)$

Exercice 2 :

Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive de la fonction ci-dessous
$f(x) = ln(x)$

Exercice 3 :

Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive des fonctions ci-dessous.

1. $f(x) = xe^{-2x}$
2. $f(x) = xcos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$
3. $f(x) = (x+3)ln(x+3)$

Exercice 4 :

Déterminer, à l'aide d'une double IPP tournante, une primitive de la fonction ci-dessous :
$f(x) = e^x cos(x)$

Exercice 5 :

Déterminer, à l'aide d'une IPP (ou d'une autre méthode), une primitive de la fonction ci-dessous :
$f(x) = sin(x)cos(x)$

Exercice 6:

Déterminer, à l'aide d'une IPP, une primitive de la fonction ci-dessous :
$f(x) = x^n e^x$