Dénombrement et combinatoire

Le dénombrement est pour beaucoup d'élèves une source d'inquiétude car ils ne savent pas comment aborder les exercices. En fait, ils ne se posent pas les bonnes questions. Nous allons ici détailler les différentes méthodes à appliquer pour réussir.

Les questions :

- La situation présente-t-elle un ordre ?
- Les éléments peuvent ils se répéter dans les réponses ?
- Est-ce qu'on opère de manière simultanée ?

Pour pouvoir aborder sereinement les exercices, il faut parfaitement connaitre les notations et les définitions.

Les p-uplets :

Un p-uplet est une liste ordonnée d'éléments d'un ensemble E donné et fini. Il est important de noter que le cardinal de E, noté $card(E) = n$ n'a pas la même valeur que p.

Exemple 1 :

On donne les 6 voyelles de l'alphabet et on souhaite former des mots de 3 lettres.
On a ici : $n = 6$ et $p = 3$. Puisqu'il s'agit d'une liste de 3 éléments, éventuellement les mêmes, nous avons pour la première lettre 6 possibilités, 6 possibilités également pour la seconde et enfin 6 pour la dernière. C'est le principe multiplicatif qui s'applique ici.
Nous avons donc au total $6^3 = 216$ listes de 3 voyelles, éventuellement identiques, choisies parmi les 6 de l'alphabet.
Par exemple : $\{(e, a, u); (i, i, i); (a, a, o); \ldots\}$
On pourrait aussi demander de dénombrer les mots de 3 lettres qui ont du sens… Comptez-les parmi les 216 possibilités si vous avez du courage !

Exemple 2 :

Un octet est un 8-uplet de $E = \{0; 1\}$. Un octet est par exemple $(0,1,1,0,1,0,0,1)$
Puisqu'on peut répéter les nombres, on a au final :$card(E)^8 = 256$.
Il existe donc 256 octets différents. Il y a par exemple 8 octets contenant un seul chiffre 1 et 56 contenant deux chiffres 1.

Les p-uplets d'éléments distincts :

Cette catégorie est un cas particulier. On appelle cela des arrangements. On n'accepte pas ici la répétition d'un élément de E.
Si on reprend l'exemple avec les voyelles ci-dessus, (i, i, i) et (a, a, o) ne sont pas autorisés.
Il y a donc naturellement moins de p-uplets d'éléments distincts que de p-uplets.
Pour la première lettre, il y a 6 possibilités, 5 pour la seconde et 4 pour la dernière soit au final $6 \times 5 \times 4 = 120$. Il y a donc 120 p-uplets d'éléments distincts.

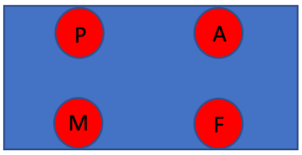
Les permutations :

Les permutations sont aussi un cas particulier des p-uplets. Ici $card(E) = p$. C'est-à-dire que la liste a la même longueur que le cardinal de l'ensemble.

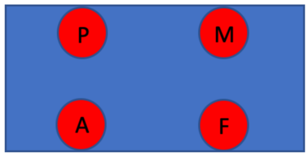
Exemple :

La famille Bertrand, composée de 4 personnes s'installe à table. Il y a le papa, la maman, Arthur et Fiona. Comme dans votre famille, chez les Bertrand, chacun mange à sa place. Mais si on décidait de tout chambouler, combien y aurait-il de possibilités ??
Pour cela, on imagine la table comme une liste ordonnée dans laquelle la répétition est impossible et de la même dimension que $E = \{papa\,; maman\,; Arthur\,; Fiona\}$

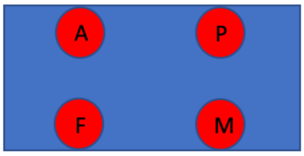
Pour placer la première personne, il y a 4 possibilités, pour la deuxième, il en reste 3, pour la troisième 2 et enfin une seule pour la dernière.
Le nombre de permutation est donc de $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
Voici quelques exemples de disposition à table chez les Bertrand.



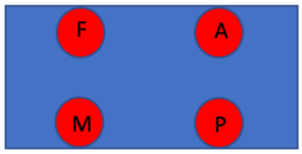
$\{papa\,;maman\,;Arthur\,;Fiona\}$



$\{papa\,;Arthur\,;Maman\,;Fiona\}$



$\{Arthur\,;Fiona\,;Papa;maman\}$



$\{Fiona\,;maman\,;Arthur\,;Papa\}$

Remarquons qu'un ou plusieurs membres de la famille peut garder sa position ou tous peuvent changer de position.

<u>Les combinaisons :</u>

Lorsqu'on doit utiliser les combinaisons, c'est qu'on opère de manière simultanée sur l'ensemble E. On prend une partie des éléments d'un ensemble donné. L'ordre, ici, n'a aucune importance dans la création des combinaisons.

<u>Exemple 1 :</u>

Dans une classe de 30 élèves, on souhaite former une paire de délégués, indépendamment de la parité garçon/fille. On doit donc choisir deux éléments ***<u>parmi</u>*** les 30 que compte la classe.
Pour le premier délégué, nous avons donc 30 possibilités.
Pour le deuxième délégué, il nous reste 29 possibilités.
Cependant, la paire (Brandon ; Brenda) est la même que (Brenda ; Brandon) puisqu'aucun ordre n'intervient ici.
On a donc $\frac{30\times29}{2} = 435$. Il y a donc 435 paires de délégués possibles dans une classe de 30.
On a aussi la notation :$\binom{30}{2} = 435$

<u>Exemple 2 :</u>

En classe de première, les élèves doivent choisir 3 spécialités parmi les 12 proposées par le ministère. Il s'agit d'un choix simultané de 3 spécialités parmi 12.
Les choix (Math ; SVT, Arts), (SVT, Math, Arts), etc… sont tous les mêmes. Il y en a d'ailleurs 6 puisqu'il s'agit d'une permutation circulaire ou 3-uplet dans un ensemble à 3 éléments.
On va donc choisir $\binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$.
Un lycée qui proposerait les 12 spécialités (8 au lycée ND La Merci) aurait donc 220 combinaisons possibles pour les élèves de premières… Imaginez les emplois du temps !!!

<u>A vous de jouer maintenant</u>