Asymptote à une courbe

Objectif :

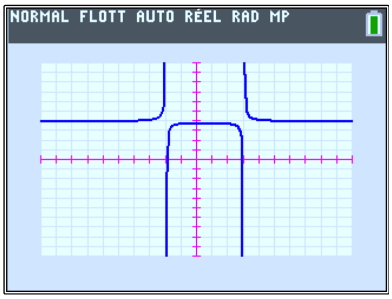
Déterminer si la représentation graphique d'une fonction admet une asymptote, au voisinage d'un point ou de l'infini.
Attention, cela n'a aucun sens de dire qu'une fonction admet une asymptote. Une fonction admet une limite et sa représentation graphique admet une asymptote. On détermine d'ailleurs une propriété graphique sans tracer de courbe. Une même courbe peut d'ailleurs posséder plusieurs types d'asymptote à différents voisinages.

Méthode :

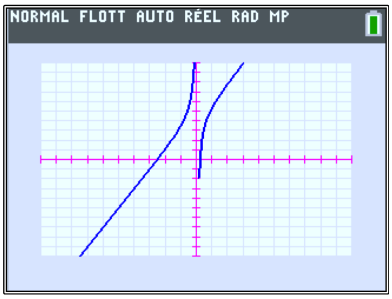
Puisqu'une asymptote est une droite, il y a trois possibilités : une droite horizontale, verticale ou oblique.
Après avoir déterminé la limite de la fonction, on regarde dans quelle situation on se trouve :

- Si la limite au voisinage de l'infini donne un nombre (noté *l*), alors la représentation graphique de la fonction admet une Asymptote Horizontale. Cela se traduit mathématiquement par : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l \Longrightarrow y = l \text{ est } AH \text{ à } \mathcal{C}_f$
- Si la limite au voisinage d'un nombre (noté *a*) donne l'infini, alors la représentation graphique de la fonction admet une Asymptote Verticale. Cela se traduit mathématiquement par : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow x = a \text{ est } AV \text{ à } \mathcal{C}_f$
- Si la limite au voisinage de l'infini donne l'infini, alors la représentation graphique de la fonction admet (peut être) une Asymptote Oblique. Cela se traduit mathématiquement par : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow y = ax + b \text{ est } AO \text{ à } \mathcal{C}_f$.

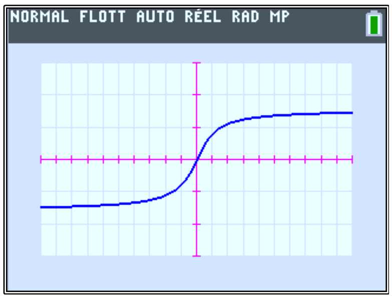
  Il y a une autre fiche méthode qui traite de ce sujet.



La courbe présente deux asymptotes verticales en -2 et 3 ainsi qu'une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



La courbe présente une asymptote verticale en 0 ainsi qu'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



La courbe présente deux asymptotes horizontales au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 1 :

Pour chacune des limites ci-dessous, calculer la et donner, si elle existe, l'équation de l'asymptote ainsi que sa nature.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 7\\ x>7}} \frac{4}{x-7}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} - 4$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x+3}{x^2+7x+1}$

Exercice 2 :

Pour chacune des limites ci-dessous, calculer la et donner, si elle existe, l'équation de l'asymptote ainsi que sa nature.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} \frac{-2x+3}{x^2-25}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+8x-9}{5-2x^2}$

Exercice 3 :

Pour chacune des limites ci-dessous, calculer la et donner, si elle existe, l'équation de l'asymptote ainsi que sa nature.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^2+7}{1-e^x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+9x+17}{x+2}$

Exercice 4 :

On donne la fonction $f(x) = 7x - 8 + \frac{1}{2x-6}$

1) Déterminer le domaine de définition de *f*.
2) Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition

Donner les équations des Asymptotes à la courbe.

Exercice 5 :

Lire sur les captures d'écran suivantes les limites des fonctions aux bornes du domaine de définition ainsi que les asymptotes associées s'il y en a.