Asymptote Oblique à une courbe

Objectif :

Déterminer si la représentation graphique d'une fonction admet une Asymptote Oblique au voisinage de l'infini. Il est important de noter que cette notion n'a pas de sens au voisinage d'un point. On peut aussi déterminer la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote.

Méthode :

Si la limite au voisinage de l'infini donne l'infini, alors la représentation graphique de la fonction admet (peut être) une Asymptote Oblique. Cela se traduit mathématiquement par :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow y = mx + p \text{ est } AO \text{ à } \mathcal{C}_f$$

Pour mettre en évidence l'Asymptote Oblique, on étudie alors la limite de la différence entre l'expression de la fonction et l'expression de la fonction affine. Si elle est nulle, nous sommes bien en présence d'une Asymptote Oblique

Différents cas sont possibles :

- Si l'expression de la fonction met directement en évidence une asymptote oblique, alors on étudie : $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0 \Longrightarrow y = mx + p, AO$ à $\mathcal{C}_f$

  Par exemple, la représentation graphique de $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$ présente une AO.
- Si la fonction est une fonction rationnelle, on peut faire apparaître la « potentielle Asymptote Oblique » en effectuant une division polynomiale.
- Si on n'a aucune idée de l'expression de l'Asymptote Oblique, on effectue deux calculs de limites successifs : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ puis $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = p$ ce qui permet de conclure que $y = mx + p, AO$ à $\mathcal{C}_f$
- En fonction du signe de $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + p)]$, on peut conclure à la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de l'asymptote.

Remarques :

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ Il n'y a pas d'Asymptote Oblique. L'étude des branches paraboliques sera étudiée dans le supérieur.
- L'Asymptote peut exister au voisinage des deux infinis ou au voisinage d'un seul.

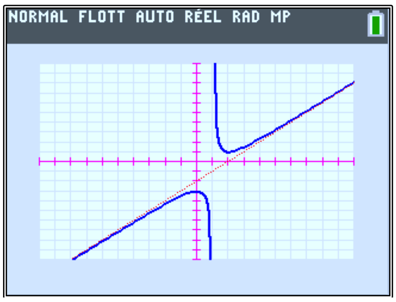
Exemple :

On donne la représentation graphique de la fonction :

$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1}$

La courbe présente une asymptote verticale en 1, valeur interdite.

$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0 \Longrightarrow y = x - 2, AO$ à $\mathcal{C}_f$



Exercice 1 :

Montrer que la représentation graphique de la fonction *f* admet une asymptote oblique.

- $f(x) = -3x + 7 + \frac{1}{3x-5}$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + 2x$
- $f(x) = -x + x^3 e^{-x}$

Exercice 2 :

Est-ce que la représentation graphique de la fonction *f* admet une asymptote oblique ?

- $f(x) = \frac{7x^2+9x-3}{x+1}$
- $f(x) = \frac{5x^2+3}{2x^3+8x+1}$
- $f(x) = \frac{5x^4+35x^3}{x^3+7x+1}$