Suites arithmético-géométriques

Objectif :

L'étude d'une suite arithmético-géométrique ne peut pas se faire directement. C'est pourquoi une suite auxiliaire est toujours donnée dans l'énoncé. La connaissance de la formule explicite de cette suite auxiliaire permet alors de connaître l'expression de la suite initiale.
En Terminale ES, la suite auxiliaire est toujours une ***suite géométrique***.

Méthode :

On donne $u_{n+1} = q \times u_n + b$ une suite et $v_n = u_n + c$ une suite auxiliaire.
La démarche est toujours la même :

- On montre que la suite (v_n) est une suite géométrique en montrant que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est indépendant de v_n ou en montrant que $v_{n+1} = q \times v_n$
- On trouve ainsi la formule explicite (v_n) après avoir calculé son premier terme.
- On obtient alors par un jeu d'écriture la formule explicite de la suit (u_n).
- Suivant les exercices, on peut rechercher la limite de (u_n) ou un seuil pour (u_n)
- Attention, la recherche d'un seuil impose l'utilisation de la fonction *ln*, enseignée en terminale. Un indice : *toute trace de recherche, même infructueuse…*

Exercice1 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 3$

1) Quelle est la nature de la suite (u_n).
2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5) Quel est le sens de variation de (u_n)?

Exercice2 :

Une entreprise du secteur du bâtiment doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.
En 2013, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets par an. Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5% par rapport à la quantité rejetée l'année précédente mais elle produit 200 tonnes de déchets supplémentaires par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout n, on note D_n, la quantité en tonnes, de déchets pour l'année $2013 + n$
On a donc $D_0 = 40000$

1. Calculer D_1 et D_2.
2. Justifier que pour tout entier naturel *n*, on a : $D_{n+1} = 0{,}95D_n + 200$

On donne (V_n) la suite définie par $V_n = D_n - 4000$

3. Démontrer que (V_n)est une suite géométrique. Donner le premier terme et la raison.
4. Exprimer alors V_n puis D_n en fonction de n.
5. La quantité de déchets rejetés diminue-t-elle d'une année sur l'autre ? Justifiez.
6. Quelle est la limite de la suite (D_n)?
7. Calculer une estimation en tonnes, à la tonne près, de la quantité de déchets rejetés en 2025.
8. A partir de quelle année, le contexte restant identique, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ?

Exercice 3:

Dans une bibliothèque, on recense 15000 ouvrages en décembre 2013. A la fin de chaque année civile, on constate que 5 % des livres sont perdus et on achète 1000 nouveaux ouvrages. Pour tout entier naturel n, on note (u_n)le nombres de livres de la bibliothèque à la fin de l'année $2013 + n$

On a donc $u_0 = 15000$

1) Calculer le nombre de livres à la fin 2014 et à la fin 2015.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) On pose $v_n = 20000 - u_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
4) Après avoir calculé v_0, déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
5) En déduire que pour tout entier n, $u_n = 20000 - 5000 \times 0{,}95^n$
6) Déterminer les variations de la suite (u_n)
7) La bibliothèque possède un rayonnage permettant d'accueillir 19000 ouvrages. Faut-il envisager des travaux rapidement ?