Exercices sur les suites auxiliaires

Exercice 1 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 3$

1) Quelle est la nature de la suite (u_n).
2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5) Calculer la somme des 11 premiers termes de (u_n)

Exercice 2 :

a) Reprendre toutes les questions de l'exercice 1 en utilisant :

- Une suite (u_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10}u_n u_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10}u_n$
- Une suite (v_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 13u_n - 4$

b) Reprendre toutes les questions de l'exercice 1 en utilisant :

- Une suite (u_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$
- Une suite (v_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - \frac{3}{5}$

Exercice 3 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$

1) Quelle est la nature de la suite (u_n).
2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3) Donner l'expression de $v_n$en fonction de n.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + {u_n}^2}$.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = {u_n}^2$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2) Donner l'expression de $v_n$en fonction de n.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 7u_{n-1} + 8u_n$

1) Démontrer que la suite (s_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est géométrique.
2) En déduire l'expression de (s_n) en fonction de n.
3) On pose alors $v_n = (-1)^n u_n$ et$t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer alors t_n en fonction de s_n.
4) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer la somme T_{n-1}de deux manières différentes.

Exercice 6 :

On considère une suite (u_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3-u_n}$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$
2) En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
3) On considère la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

   Déterminer l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n.

Exercice 7 :

On considère une suite (u_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8 :

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après-midi à partir du 1er septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.
Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5% des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.
Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.
La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.
1. Montrer que $u_1 = 86$
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 200$.
a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.
c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a: $u_n = 200 - 120 \times 0{,}95^n$.
Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
4. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a: $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0{,}95^n$
b. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

Exercice 9 :

Le 1er janvier 2013, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise au 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel n, on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $2013 + n$

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique ? Arithmétique ? justifier votre réponse
2) Donner la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 1000$. Démontrer alors que la suite (v_n) est géométrique.
4) En déduire l'expression (v_n) puis celle de (u_n) en fonction de n.
5) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0{,}9^n$
   En déduire alors le sens de variation de la suite (u_n)
6) Au 1er janvier 2013, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. A partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?