Divisibilité et congruence

Exercice 1 :

On donne $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n(2n+1)(7n+7)$

1) Démontrer que a_n est pair.
2) Montrer que a_n est divisible par 3.
3) Le nombre a_n est-il divisible par 5 ?

Exercice 2 :

Conjecturer une propriété concernant la divisibilité de $n^2 - 1$par 8 et la démontrer.

Exercice 3 :

Déterminer les nombres entiers relatifs x et y tels que $x^2 - 4xy = 15$

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $2n + 3$ divise $3n + 7$

Exercice 5 :

On donne :$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 + 5^1 + 5^2 + \ \dots . + 5^{n-1}$
Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, 5^n + 19$ est divisible par 4.

Exercice 6 :

Déterminer les entiers naturels n tels que $\frac{11n-6}{3n+1}$ soit un entier

Exercice 7 :

Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne $2^{2013} + 562$ par 4.

Exercice 8 :

Soit n un entier naturel non nul.
Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne $(n+2)^2$ par $n + 4$.

Exercice 9 :

Effectuer la division euclidienne de $n^2 + 5n + 9$ par $n + 2$.

Exercice 10:

Un damier a autant de lignes que de colonnes. Toutes les cases seront occupées par un et un seul jeton. En distribuant autant de jetons à chacun des 5 joueurs, Mike se rend compte qu'il lui en reste 3.
« Impossible » lui répond Brenda !!! Tu t'es forcément trompé.
Que penser de l'affirmation de Brenda ?

Exercice 11 :

Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{41} par 7

Exercice 12 :

Démontrer que $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013}$ est divisible par 5.

Exercice 13 :

1) Donner pour n allant de 0 à 8 le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
2) En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{3562} par 5.
3) Donner le reste de la division euclidienne par 5 de $3722^{763} + 6753^{811}$.

Exercice 14 :

Soit n un entier naturel, on pose alors $a = n(n+1)(n+5)$

1) Écrire une fonction Pyhton qui teste la divisibilité de a.
2) Conjecturer puis démontrer.

Exercice 15 :

1) Pour n allant de 0 à 6, calculer avec votre calculatrice $3^{2n+1} + 5^{2n+1}$
2) Émettre une conjecture.
3) Démontrer votre conjecture.
4) De la même manière, que peut-on dire de $11^{2n+1} + 13^{2n+1}$.

Exercice 16 :

On considère un entier naturel n.

1) Conjecturer les restes possibles de n^2 par 8.
2) Démontrer votre conjecture.
3) Dans le cas ou n est impair, démontrer que le reste de la division euclidienne de n^4 par 8 est toujours 1.
4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(n+3)^2 - 1 \equiv 0[8]$

Exercice 17 :

On considère un entier naturel n.

1) Démontrer que si $n \equiv 2[5]$ et que $n \equiv 3[5]$, alors $n^2 + 1$ est un multiple de 5.
2) A l'aide de la calculatrice, conjecturer une hypothèse sur $n(n^4 - 1)$.
3) Démontrer votre conjecture.

Exercice 18 :

1) Donner pour n allant de 0 à 8 le reste de la division euclidienne de 2^n par 7.
2) En déduire que si n n'est pas un multiple de 3, alors $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7.

Exercice 19 :

Démontrer que $8^{2002} + 2$ est divisible par 11.

Exercice 20 :

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 21 :

Démontrer que le nombre $n = \ ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 quelque soient les entiers relatifs a et b.