Exercices sur Théorème de la bijection

Configuration de la machine :

- Aller dans f(x) et rentrer l'expression de la fonction.
- Dans 2nde fenêtre, on commence avec la valeur inférieure de l'intervalle et on met un pas de 1 dans les réglages.
- Dans 2nde graphe, on cherche dans la colonne de droite les nombres qui encadrent la valeur cherchée. On obtient un encadrement à l'unité.
- On retourne dans 2nde fenêtre, on commence avec la valeur inférieure de l'intervalle trouvée ci-dessus et on met un pas de 0,1.
- On retourne dans 2nde graphe, on cherche dans la colonne de droite les nombres qui encadrent la valeur cherchée. On obtient ainsi un encadrement au dixième.
- On réitère ce processus jusqu'à obtenir un encadrement à la précision souhaitée.
  Cette méthode s'appelle ***la méthode par balayage.***

Exercice 1 :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 12x - 18$

1) Etudier les variations de la fonction *f* et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, localisée dans l'intervalle $[4;5]$.
3) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 2 :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

1) Etudier les variations de la fonction *f* et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 60$ admet une unique solution α, localisée dans l'intervalle $[5;6]$.
3) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3 :

Soit la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{8}\ln x - x\ln x$

1) Calculer *f'* et *f''*
2) Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α,
3) Justifier l'encadrement $1 \le \alpha \le 1{,}2$.
4) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
5) Dresser alors le tableau des variations de *f*.

Exercice 4 :

Soit la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (2-x)e^x - 1$

1) Etudier les variations de la fonction *f* et dresser son tableau de variations.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α,
3) Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

Exercice 5 :

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 4$ et (C) sa courbe représentative.

1) Donner le domaine de définition de la fonction *f*
2) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
3) Calculer la dérivée de *f* et étudier son signe.
4) Construire le tableau complet des variations de *f.*
5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en donnant un encadrement au centième de la solution x_0 de l'équation.
6) Déterminer l'équation de la tangente *T* à la courbe au point d'abscisse $x_1 = 3$.
7) Déterminer, en unités d'aires, la valeur exacte de l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 6$.

Exercice 6 :

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{5}{x+1}$

1. Calculer la dérivée de *f* et vérifier que $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 2}{(x+1)^2}$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction *f* et dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ qui sont 0 et $\dfrac{2}{3}$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 5$ admet deux solutions sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ notées α et β.
Donner les valeurs approchées de α et β au centième.

5. On note *m* un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de *m* le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Exercice 7 :

On considère la fonction *f* définie par: $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ On désigne par (*C*) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Partie A : *Étude d'une fonction auxiliaire*

g est la fonction définie par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les limites de *g* en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de *g*.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α. En donner une approximation à 10^{-3} près.
4. En déduire le signe de la fonction *g* (la réponse sera soigneusement justifiée).

Partie B : *Étude de la fonction f*

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D, à déterminer.
2. Montrer que pour tout x de D, $f'(x)=\frac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$ En déduire le tableau de variation de la fonction f.
3. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est asymptote à (C), puis étudier la position relative de ces deux courbes.
4. Tracer la droite Δ et la courbe (C).

Partie C : *Nombre de solutions d'une équation*

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$.
2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.
3. En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=x+m$.

Exercice 8 :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=4x^3-3x-8$

a. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\left[1;+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{x^3+1}{4x^2-1}$

a. Démontrer que le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ sur $\left[1;+\infty\right[$

b. En déduire le sens de variation de f sur $\left[1;+\infty\right[$

c. En utilisant la définition de α, démontrer que : $f(\alpha)=\frac{3}{8}\alpha$ En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.