



## Fluctuation et Estimation

### Exercice 1 : (une application du théorème de Moivre-Laplace)

Une salle de spectacle peut contenir 200 personnes. On admet qu'un spectateur ayant acheté son billet a une probabilité égale à 0,1 de ne pas se rendre au spectacle le soir de la représentation.

1. Si  $n$  personnes ont acheté leur billet à l'avance, dans quel intervalle asymptotique fluctue la proportion d'entre elles qui se rendront au spectacle avec une probabilité de 0.95 ?

2. Devant ce constat, le directeur de la salle décide d'autoriser la prévente de  $n$  billets avec  $n > 200$ , pour tenter de remplir au maximum sa salle. Mais en même temps, il ne souhaite pas devoir refuser des spectateurs ayant leur billet le soir de la représentation. Quelle valeur maximale de  $n$  peut-il autoriser s'il souhaite qu'il n'y ait pas plus de 200 personnes qui se présentent le soir du spectacle avec une probabilité de 0,95 ?

### Exercice 2 :

Sur un échantillon de 350 personnes, un candidat aux élections municipales a obtenu 54 % des intentions de vote.

- a) Déterminer un intervalle de confiance.
- b) Si les élections avaient eu lieu le jour de ce sondage et si les réponses au sondage étaient sincères, ce candidat aurait-il été élu au premier tour ?
- c) Déterminer le nombre de personnes qu'il aurait fallu interroger afin d'être certain (à 95 %) que ce candidat sera élu.

### Exercice 3 : (d'après document ressources / Intervalle de fluctuation et prise de décision)

Une compagnie aérienne possède des A340 d'une capacité de 300 places.

Cette compagnie vend  $n$  billets sur l'un de ses vols.

Un acheteur se présente à l'embarquement avec une probabilité  $p$  et les comportements des acheteurs sont indépendants les uns des autres.

On note  $X_n$  la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement.

La compagnie cherche à optimiser le remplissage de ces avions en vendant plus de billets que de places dans l'avion (phénomène de surréservation  $n > 300$ ). La compagnie veut cependant, maîtriser le risque que le nombre de passagers munis d'un billet se présentant à l'embarquement excède 300.

1. Rappeler la loi suivie par  $X_n$ .

2. a. Écrire l'intervalle de fluctuation asymptotique de  $\frac{X_n}{n}$  au seuil de 95 %.

b. Écrire l'intervalle auquel la compagnie souhaite qu'appartienne  $\frac{X_n}{n}$ .

c. En déduire une condition sur  $n$  et  $p$  de la forme  $f(x) \leq 0$  impliquant que la probabilité que le nombre de passagers se présentant à l'embarquement excède 300 soit inférieure ou égale à 0,05.

3. Étude de la fonction  $f$  (pour  $p = 0,9$ ).

Démontrer qu'il existe un unique entier  $n_0$  tel que  $f(n_0) < 0$  et  $f(n_0 + 1) > 0$ . Déterminer cet entier  $n_0$ .



**Exercice 4 :** (d'après document ressources / Intervalle de confiance)

Dans le but d'évaluer la prise en charge de la bronchiolite du nourrisson dans un hôpital de la région Aquitaine, une étude rétrospective a été mise en place. Il est recommandé de coucher l'enfant de manière très inclinée (proclive) dans le cadre de la prise en charge de cette maladie. Voici le tableau récapitulatif du décompte des pratiques dans deux services différents sur une courte période.

Couchage proclive	En service des urgences	En service hospitalier	Total
OUI	45	52	97
NON	29	8	37
Total	74	60	134

Peut-on conclure au seuil de 95 % que la pratique de couchage n'est pas identique dans les deux services ?

**Exercice 5 :**

Une société qui produit des jus de fruit propose au service commercial deux nouveaux mélanges : OPK (orange pamplemousse kiwi) et OMA (orange mangue ananas). Dans un sondage aléatoire réalisé sur 60 consommateurs, 56 % préfère le mélange OPK.

On fait l'hypothèse (H) que dans l'ensemble des consommateurs, 50 % préfère le mélange OPK. Peut-on rejeter l'hypothèse (H) au risque de 5 % ?

**Exercice 6 :**

On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français, le pourcentage d'enfants ayant eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %.

Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.

Il sélectionne de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.

La règle de décision est la suivante : Si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion des jeunes de 11 ans à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous en conclure ?
3. Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d'asthme que dans le reste du département.  
Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu'une proportion observée de 19 % soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

**Exercice 7 :**

On se propose de comparer la sensibilité aux allergies printanières entre la population urbaine et la population rurale.

Dans un échantillon de 320 personnes vivant en zone urbaine, 121 sont allergiques. Dans un échantillon de 296 personnes de la population rurale, on a trouvé 126 personnes allergiques.

1. Donnez, pour chacune des deux populations, un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 pour le pourcentage de personnes allergiques.



2. Peut-on, au niveau de confiance de 0,95, déduire des résultats des échantillons que la population rurale est plus sensible que la population urbaine ?

**Exercice 8 :**

L'audience d'une chaîne de télévision pour les informations de 20 h de lundi dernier a été mesurée sur 1500 appareils : 28 % de l'ensemble des téléspectateurs ont regardé le journal télévisé de cette chaîne.

Déterminez l'intervalle de confiance au seuil de 95 % des audiences de la chaîne lors de ce journal de 20 h.

**Exercice 9 :**

L'étude de 122 squelettes d'adultes de la population de Wharram Percy, un village isolé d'Angleterre au Moyen Âge, a permis de constater que 16 % des personnes étaient gauchères. On considère que cette population permet d'obtenir une image représentative du pourcentage réel de vrais gauchers dans une population de cette époque.

1. Donner un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 du pourcentage de gauchers dans la population de Wharram Percy.
2. En Angleterre, de nos jours, la proportion de gauchers se situe entre 10 et 13 %. Peut-on, au niveau de confiance 0,95, dire que de nos jours la population de gauchers est moins élevée qu'au Moyen Âge ?
3. En supposant que les pourcentages soient restés inchangés, quelle aurait dû être la taille minimum de l'échantillon de squelettes étudiés pour pouvoir conclure au niveau de confiance 0,95, que le nombre de gauchers est moins élevé de nos jours qu'au Moyen Age ?

**Exercice 10 :**

Le taux de réussite au Bac L en France en 2019 a été de 85,6 % et celui du bac S de 88,2 %. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique du taux de réussite dans une classe de TL qui est composée de 35 élèves. Faites de même pour une classe de TS de 35 élèves.

**Exercice 11 :**

Une centrale d'achat demande à un producteur de melons de ne livrer que des melons de diamètre compris entre deux bornes. Il accepte ces lots à condition qu'il n'y ait pas plus de 7% de melons non conformes. A la livraison, un contrôleur mesure 80 melons issus d'un échantillon. Il en trouve 9 non conformes.

Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 %. Le contrôleur doit-il accepter ce lot ?

**Exercice 12 :**

La proportion d'enfants prématurés est de 6%. Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré. On réalise une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 400 naissances correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible. Les chercheurs décident a priori que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95, alors leur hypothèse sera acceptée.

On sait que dans cet échantillon, il y a 50 enfants prématurés.

- 1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique  $I$  associé à cette situation au seuil de 0,95.
- 2) Quelle est donc la conclusion ?



### **Exercice 13 :**

Un candidat à une élection fait effectuer un sondage. Sur 100 personnes interrogées, 63 déclarent vouloir voter pour lui

On suppose que les électeurs ne changent pas d'avis le jour du vote. On notera  $p$  le pourcentage de voix obtenues par le candidat. On suppose que  $0,5 \leq p \leq 0,7$

- 1) Déterminer un intervalle de confiance de  $p$  au niveau de confiance de 0,95.
- 2) Énoncer ce résultat en langage courant.

### **Exercice 14 :**

La semaine précédant une élection qui oppose deux candidats A et B, on interroge 100 personnes pour connaître leur intention de vote. 45 personnes indiquent qu'elles vont voter pour le candidat A.

- 1) Justifier que les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 sont satisfaites.
- 2) Peut-on affirmer avec une probabilité de 0,95 que le candidat A ne sera pas élu ?
- 3) En supposant que le pourcentage d'intention de vote pour le candidat A reste égal à 45 %, quel nombre minimum de personnes faut-il interroger pour pouvoir affirmer avec une probabilité supérieure à 0,95 que le candidat A ne sera pas élu ?

### **Exercice 15 :**

Une station de ski familiale n'attire que 25% de skieurs habitants hors du département. Souhaitant élargir sa clientèle, la station fait réaliser des travaux au cours de l'été suivant : nouveau télésiège débrayable, canons à neige, etc...

L'hiver suivant, 500 skieurs ont été interrogés : 172 d'entre eux habitent hors du département.

- 1) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% adapté à cette situation.
- 2) Peut-on affirmer que les travaux de l'été ont eu un impact sur la fréquentation des skieurs habitants hors du département ?

### **Exercice 16 :**

Un maire affirme que, d'après ses informations, 55% des habitants majeurs pratiquent un sport. On interroge 100 habitants majeurs au hasard et 43 % disent pratiquer un sport. On suppose que l'affirmation du maire est vraie et que la population de la ville est suffisamment grande pour considérer que les 100 « tirages » sont effectués avec remise.

- 1) Préciser l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 0,95 adapté à cette situation.
- 2) Comment peut-on interpréter l'affirmation du maire ?

### **Exercice 17 :**

38 % des familles françaises possèdent un ou plusieurs chats. Dans un village comportant 800 familles, on dénombre 200 familles avec un ou plusieurs chats.

- 1) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
- 2) Calculer la fréquence observée dans ce village.
- 3) Ce village est-il représentatif de la population française pour ce caractère au seuil de 95 % ?

### **Exercice 18 :**

Dans un casino de Las Vegas, sur 5000 lancers de dé cubique, 2375 ont donné un nombre pair.

Faut-il faire une enquête pour utilisation de dé truqué ?



### **Exercice 19 :**

Dans un lycée qui comporte 1500 demi-pensionnaires, un sondage sur la restauration a été réalisé en interrogeant 338 élèves qui déjeunent à la cantine. Ce lycée comporte 54,8 % de filles et 174 d'entre elles ont participé à ce sondage.

#### **Partie A :**

- 1) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sur le caractère être une fille.
- 2) L'échantillon utilisé pour le sondage est-il représentatif de la population du lycée ?

#### **Partie B :**

L'intendance du lycée souhaite estimer la proportion d'élèves de l'établissement qui souhaitent se servir eux-mêmes à la cantine plutôt que d'être servis à table. L'intendance ne prendra une décision de self-service que si la majorité des élèves y est favorable. 181 élèves répondent oui.

- 1) Donner un intervalle de confiance à 95 %.
- 2) Que peut en déduire l'intendance ?

#### **Partie C :**

Le chef d'établissement n'est pas convaincu de devoir changer à la suite de ce sondage. Afin de l'aider à se décider, on suppose qu'on réalise maintenant un sondage de taille  $n$  et que la fréquence des élèves désirant se servir reste la même.

Déterminer la taille minimum de l'échantillon à interroger qui pourrait davantage convaincre le chef d'établissement de changer.

### **Exercice 20 :**

Dans un slogan publicitaire, une banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers qui lui sont adressées sont acceptées. Afin de vérifier le slogan de la banque, l'autorité de régulation professionnelle de la publicité (ARPP) étudie un échantillon de 1000 demandes de prêts immobiliers choisis au hasard et de façon indépendante.

- 1) Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque dans les échantillons de taille 1000.
- 2) Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.
- 3) Sur les 1000 dernières demandes de prêts effectuées dans cette banque, 600 ont été acceptées. Quel avis va émettre la ARPP ?