Exercices sur le calcul intégral

Exercice 1 :

Calculer les intégrales ci-dessous. On donnera la valeur exacte.

1. $\int_2^3 (2x+5)dx$
2. $\int_1^2 (t-\frac{1}{t^2})dt$
3. $\int_{-2}^3 (x^2-x+1)dx$
4. $\int_{-2}^0 (4t^3+1)dt$
5. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (4+e^x)dx$
6. $\int_4^9 \frac{5}{\sqrt{x}}dx$

Exercice 2 : *Des grands classiques...*

Calculer les intégrales ci-dessous. On donnera la valeur exacte.

1) $\int_1^2 (2x+1)(x^2+x+1)dx$
2) $\int_2^3 \frac{2t-1}{\sqrt{t^2-t+1}}dt$
3) $\int_0^2 2xe^{x^2}dx$
4) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx$

Exercice 3 :

On se propose de calculer l'intégrale $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que :
   $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;-2\}\ \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+2)}$
2) En déduire alors la valeur exacte de l'intégrale.

Exercice 4 :

Après avoir ajustées les fonctions, calculer la valeur exacte des intégrales ci-dessous.

1) $\int_2^3 \frac{2x}{(3x^2+5)^2}dx$
2) $\int_0^{\ln 10} \frac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$
3) $\int_{\ln 2}^{\ln 10} e^{2x}(e^{2x}-3)dx$
4) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{\sqrt{1+e^{3x}}}dx$

Exercice 5 :

La progression de la population d'une nation est donnée, en millions de personnes par $P(t) = 18e^{0,034t}$, à compter d'une année $t = 0$.

1) Calculer la population au bout de 25 ans.
2) Calculer la valeur moyenne de la population au bout de 25 ans.
3) A l'aide de votre calculatrice, déterminer à quelle date la population atteint la valeur moyenne de ces 25 années.

Exercice 6 :

En utilisant la linéarité, calculer rapidement :

1) $\int_0^4 x^2+2x-5\,dx - \int_0^4 (x+1)^2\,dx$
2) $\int_1^e ln(t)\,dt + \int_1^e t^2 + ln(\frac{1}{t})\,dt$

Exercice 7 :

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer leur valeur moyenne sur l'intervalle I donné :

• $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ avec $I = [1; 10]$ • $f(x) = 5e^x + 3$ avec $I = [0; ln\,(2)]$

Exercice 8 :

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

1. Démontrer que pour tout réel t de$[0; +\infty[$, $0 \leq h''(x) \leq t$
2. Soit x un réel positif quelconque. Par deux intégrations successives de l'inégalité précédente entre 0 et x, démontrer que : $0 \leq h(x) \leq \frac{x}{6}$

Exercice 9 :

Etude d'une fonction définie par une intégrale

Soit $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. (On ne cherchera pas à expliciter $f(x)$).

1°) Justifier que f est définie et croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
Montrer que $\mathcal{C}$ passe par O et donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en O.

3°) $\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x) = f(tan(x)) = \int_0^{tan\,(x)} \frac{1}{1+t^2} dt$.
Démontrer que g est dérivable sur$\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$et déterminer $g'(x)$.
En déduire une expression simple de $g(x)$ en fonction de x.

4°) Déterminer $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.

5°) $\forall x \in]0; +\infty[$on pose $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrer que h est constante et déterminer cette constante.

6°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

7°) Démontrer que f est une fonction impaire et tracer sa représentation graphique.

Exercice 10:

Donner une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$.

Exercice 11:

Démontrer que $\forall x \in [0; 1], 1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - \frac{x^2}{2}$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, $\forall x \in [0; 1]$.