Exercices sur les Lois à densité

Exercice 1 :

f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 3x^2$

1) Justifier que *f* est une fonction densité de probabilité sur $[0;1]$
2) Calculer $\int_0^1 t \times f(t)dt$ et interpréter le résultat.
3) *X* est une variable aléatoire qui suit la loi de densité *f*. Calculer la probabilité $P(0 \leq X \leq 0{,}5)$ puis de $P(0{,}4 \leq X \leq 0{,}6)$

Exercice 2 :

Dans un supermarché un jour de grande affluence, le temps d'attente, noté *T*, à la caisse en minutes suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2;20]$

1) Donner la fonction densité *f* de la loi de probabilité de *T*.
2) Déterminer la probabilité pour que le temps d'attente soit inférieur à un quart d'heure.
3) Sachant que j'ai déjà attendu 10 minutes, quelle est la probabilité que j'attende 5 minutes de plus ?
4) Quel est le temps d'attente moyen à la caisse ?

Exercice 3 :

Soit *Y* une variable aléatoire de loi $N(3; 2)$
1) Calculer $P(Y \leq 5)$, $P(Y \leq 5)$, $P(-1 \leq Y \leq 5)$
2) Calculer y tel que : $P(Y \leq y) = 0{,}9$, puis $P(Y \leq y) = 0{,}2$

Exercice 4 :

On suppose que la durée d'attente à un guichet de services exprimée en heure, suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$
Quelle est la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min ?

Exercice 5 :

Le temps nécessaire aux étudiants pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale, notée *T*, de moyenne 90 minutes et d'écart type 15 minutes.
1) Calculer la proportion d'étudiants qui termineront en moins de 2 heures.
2) Quelle devrait être la durée de l'épreuve si l'on souhaite que 90 % des étudiants puissent la terminer.

Exercice 6 :

Une machine fabrique en grande quantité des disques dont le diamètre doit être de 30 cm.
X est la variable aléatoire qui, à chaque disque tiré au hasard, associe son diamètre exprimé en centimètre.
On suppose que *X* suit la loi $N(30; 0{,}0324)$
On accepte les disques dont le diamètre est compris entre 29,64 cm et 30,36 cm.
Déterminer la probabilité pour qu'un disque soit accepté.

Exercice 7 :

On considère la fonction *f* définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 2xe^{-x^2}$
On admet que *f* est une densité de probabilité. Soit *X* la variable aléatoire de densité *f*.

1) Déterminer $P(0 \leq X \leq 10)$
2) Déterminer le réel *t* tel que $P(X \leq t) = 0{,}8$

Exercice 9 :

On veut étudier le temps de réaction d'un sprinter au départ d'un 100 mètres (temps qui s'écoule entre le coup de feu du starter et l'impulsion du coureur sur son starting-block)
On note X la variable aléatoire qui donne en secondes le temps de réaction d'un sprinter.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 0{,}148$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}2$
Un faux départ est constaté si le temps de réaction est inférieur à 0,1 s.
Quelle est la probabilité que le sprinter soit sanctionné d'un faux départ ?

Exercice 10 :

Des fermiers regroupés en coopérative, proposent à la vente des volailles de première qualité. Les expéditions se font quotidiennement.
En période de fêtes, la demande journalière suit une loi normale de moyenne $\mu = 800$ et d'écart type $\sigma = 160$

1) Un jour donné, la coopérative a en stock 940 volailles prêtes à être expédiées. Quelle est la probabilité que, pour ce jour, la demande ne puisse être satisfaite ?
2) Le gestionnaire de la coopérative souhaite satisfaire au moins 95% des demandes journalières. Quel doit être le nombre de volailles en stock chaque jour ?
3) L'année précédente, la demande de volaille pour les fêtes suivait aussi une loi normale de moyenne m et de même écart-type. Le gestionnaire a constaté qu'alors, avec un stock quotidien de 950 volailles, il avait pu satisfaire la demande journalière 48 fois sur 50. Quel était alors le nombre moyen de volailles commandées ?

Exercice 11 :

On admet que la masse de raisin, exprimée en kilogramme, recueillie par un vendangeur pendant une heure de travail est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne 48 kilogrammes et d'écart-type 4 kilogrammes.

1) Quelle est la probabilité qu'en une heure, le vendangeur ait cueilli au moins 50 kilogrammes ?
2) Quelle est la probabilité qu'en une heure, le vendangeur ait cueilli une masse comprise entre 44 et 52 kilogrammes ?
3) Le vendangeur travaille pendant 4 heures consécutives. Quelle est la probabilité qu'à la fin de chacune des 4 heures il ait cueilli au moins 50 kilogrammes de raisin ?

Exercice 12 :

Une variable aléatoire X suite une loi normale de moyenne 10. X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; 20]$ On suppose de plus que : $P(X \geq 12) = \dfrac{1}{3}$
On se propose de déterminer l'écart-type σ d'une telle loi.

1) On pose $Y = \dfrac{X-10}{\sigma}$
   a) Par définition que signifie que X suit la loi normale $N(10; \sigma^2)$?
   b) Expliquer alors pourquoi $X \geq 12$ équivaut à $Y \geq \dfrac{2}{\sigma}$
2) A l'aide de la calculatrice, déterminer alors une valeur approchée de $\dfrac{2}{\sigma}$ puis de σ

Exercice 13 :

Deux personnes A et B se donnent rendez-vous entre midi et une heure. A arrive à 12h 20.
a. Quelle est la probabilité que B arrive exactement à la même heure que A?
b. Quelle est la probabilité que la première personne arrivée attende l'autre plus de 10 minutes?

Exercice 14 :

Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1cm, on tire au hasard entre -1 et 1 l'abscisse d'un point M de la parabole d'équation $y = x^2$

Soit A et B les points de coordonnées $(-1;0)$ et $(1;0)$

1. on appelle S l'aire en cm² du triangle AMB. Calculer la probabilité que S soit :
a. inférieure à 0,5 cm² ; b. supérieure à 2cm².

2. On sait que $P(S<t)=\frac{1}{2}$. Calculer t.

Exercice 15 :

On tire au hasard un réel dans l'intervalle $]0;1[$ Soit D la variable aléatoire égale au premier chiffre non nul de l'écriture décimale de x.
a. Calculer la probabilité d'avoir $D = 5$.
b. Calculer la probabilité d'avoir $D \geq 1$

Exercice 16 :

Un skieur doit traverser un glacier en suivant une piste de longueur 1km. La probabilité qu'il rencontre une crevasse sur son chemin est p.
Si cette crevasse existe, sa répartition sur le chemin suit une loi uniforme sur $[0;1]$
A la distance d du point de départ $0 < d < 1$ se trouve un refuge, où le skieur peut se reposer un instant.
On note C l'événement : « la crevasse existe effectivement sur le chemin parcouru par le skieur » ;
A : « il existe une crevasse entre le départ et le refuge » ;
B : « il existe une crevasse entre le refuge et l'arrivée».
a. Interpréter les probabilités $P_C(A)$ et $P_C(B)$, puis exprimer ces probabilités en fonction de d.
b. Construire un arbre des possibilités faisant intervenir C, $\overline{C}$, A et B.
Calculer $P(A)$ et $P(B)$ en fonction de p et d.
c. Sachant que le skieur est arrivé sans encombre au refuge, quelle est la probabilité qu'il rencontre la crevasse sur la suite du parcours ?
Combien vaut cette probabilité si $p = 1$? Interpréter le résultat.

Exercice 17 :

La durée de vie d'un composant électronique, choisi au hasard dans une fabrication donnée, est une variable aléatoire T de densité exponentielle de paramètre $\lambda = 2\times10^{-4}$.
1. T est exprimée en heures. Calculer les probabilités P_1 et P_2 des événements $(T<2500)$ et $(T\geq 7000)$ respectivement. $P_1 = 0{,}39$ et $P_2 = 0{,}25$
2. En posant, pour simplifier, $P_1 = 0{,}39$ et $P_2 = 0{,}25$, calculer la probabilité de trouver, dans un lot de 10 composants choisis indépendamment :
a. 5 composants de durée de vie inférieure à 2500 h.
b. Au moins un composant de durée de vie supérieure à 7000 h.

Exercice 18 :

La durée de vie, X, d'un élément radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ.

La demi-vie est le nombre T tel que : $P(X<T)=\frac{1}{2}$

1. Montrer que : $T=\frac{\ln 2}{\lambda}$

2. On considère que la demi-vie du carbone 14 est $T = 5568$ années.

a. Évaluer $P(X<1000)$.

b. Calculer x sachant que $P(X<x)=0{,}2$.

3. On considère que la demi-vie du césium est $T = 30$ années. Répondre aux mêmes questions.

Exercice 19 : Etude de la durée de vie d'un système

Partie A :

Soit a un réel positif. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=axe^{-\frac{x}{2}}$.

1. Etude de g.

a. Etudier le sens de variation de g. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Représenter g dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.(à la calculatrice)

2. Déterminer a pour que g soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$

Partie B :

Pour fonctionner, un système utilise une cellule photoélectrique dont la durée de vie est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. (X est alors exprimée en mois).

1. a. exprimer la densité f de X.

b. Quelle est la probabilité que le système tombe en panne après 2 mois ? Après 4 mois ?

2. On admet que l'espérance de X est donnée par : $E(X)=\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x t\times f(t)\,dt$ que l'on note aussi $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

a. Soit x un réel positif. Calculer $F(x)=\int_0^x tf(t)\,dt$

b. En déduire $E(X)$

Partie C :

On dispose, en plus de la pièce originale, d'une cellule de rechange. Dans ce cas, la durée de vie est du système est une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité admet g pour densité sur $\mathbb{R}^+$

1. Quelle est la probabilité que le système tombe en panne après 2 mois ? Après 4 mois ?

2. Le mode de Y est la valeur de y pour laquelle la densité est maximale.
Quel est le mode de Y ?

3.a . Soit x un réel positif. Calculer $P(Y<t)$

b. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la médiane de Y.

4. L'espérance de Y est donnée par : $E(Y)=\int_0^{+\infty} t\times g(t)dt$

a. Soit x un réel positif. Calculer $G(x)=\int_0^x t\times g(t)\,dt$

b. En déduire $E(Y)$

Comment se traduit l'existence de la cellule de rechange sur l'espérance de vie du système ?

5. Placer sur le graphe de la partie A, les valeurs de Y correspondant au mode, à la médiane et à la moyenne de Y.

Exercice 20 :

Montrer que la fonction définie sur $[-1;1]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ est une densité de probabilité sur $[-1;1]$

Exercice 21 :

Soit $f(x)=\frac{1}{x}$ une densité de probabilité sur $[-1;a]$ avec $a\in\mathbb{R}$

1) Déterminer a.
2) Déterminer b sachant $P\left(X<b\right)=0{,}6$

Exercice 22 :

Soit $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ une densité de probabilité sur $[0;\pi]$ et F, la fonction définie sur $[0;\pi]$ par

$F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$

Montrer alors que $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et interpréter ce résultat en termes d'aire

Exercice 23 :

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{10}e^{\frac{-1}{10}x}$

1) Déterminer le paramètre λ de cette loi.
2) Calculer $E(X)$ puis $P\left(X\geq 100\right)$

Exercice 24 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{4}$

Déterminer la densité de probabilité puis calculer $P_{\left(X\geq 1\right)}\left(X\geq 2\right)$

Exercice 25 : *Appliquer le théorème de Moivre Laplace*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $B\left(180;\frac{1}{6}\right)$

On souhaite calculer $P(-0{,}5\leq\frac{X-30}{5}\leq 1{,}2)$

1) Est-il raisonnable d'utiliser l'approximation normale fournie par le théorème de Moivre Laplace pour calculer cette probabilité ?
2) Donner alors la probabilité demandée.

Exercice 26 :

Démontrer que la fonction f définie sur $[0;3]$ par : $f(x)=-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x$ est une densité de probabilité.

Exercice 27 :

On considère la fonction g définie sur $[0;2]$ par : $g(x)=\begin{cases}2x+1\ si\ x\in\left[0;\frac{1}{3}\right[\\-x+2\ si\ x\in\left]\frac{1}{3};2\right]\end{cases}$

La fonction g est-elle une densité de probabilité ?

Exercice 28 :

La nuit, dans la savane, un lion se rend à la rivière pour boire et y rester un quart d'heure. Après de nombreuses observations nocturnes, on estime que le temps d'arrivée *T*, exprimé en heures, du lion à la rivière se situe entre minuit et deux heures du matin.
T est une variable aléatoire continue de densité la fonction *f* définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in]-\infty; 0[\\ \frac{3}{4}t(2-t) \ si \ t \in [0; 2] \\ 0 \ si \ t \in]2; +\infty; [\end{cases}$$

1) Vérifier que la fonction *f* est une fonction densité de probabilité.
2) Un observateur se présente à la rivière à 0 h 30 et y reste un quart d'heure. Quelle est la probabilité qu'il y aperçoive le lion ?

Exercice 29 :

On considère que la loi qui décrit la désintégration des noyaux d'une substance radioactive est une loi exponentielle de paramètre λ. On note *T* la variable aléatoire « durée de vie » en années d'un noyau.

1) Déterminer en fonction de λ le nombre τ tel que $P(X \le \tau) = \frac{1}{2}$
2) Le césium 137 a une demi-vie d'environ 30 années. Déterminer la constante de désintégration λ associée au césium 137.
3) La constante de désintégration de l'uranium 238 est d'environ $1{,}54 \times 10^{-10}$. Déterminer la demi-vie de l'uranium 238.

Le nombre τ s'appelle la demi-vie de la substance radioactive.