Utilisation des matrices et chaine de Markov

Exercice 1 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \binom{10}{20}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = AU_n + B$, avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \binom{2}{-1}$

1) Calculer U_1
2) Justifier que $A - I_2$ est inversible.
3) Calculer $C = -(A - I_2)^{-1}B$
4) Montrer que la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = U_n - C$ vérifie l'égalité $V_{n+1} = AV_n$
5) En déduire l'expression du terme général de (U_n) puis calculer U_{10}.

Exercice 2 :

On considère la chaîne de Markov à deux états définie par la situation suivante.

- 80 % de l'effectif reste à l'état 1.
- 10 % de l'effectif de l'état 2 part pour l'état 1.
- La distribution initiale est donnée par $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$

1) Construire un graphe probabiliste traduisant cette situation.
2) Donner sa matrice de transition.
3) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 2 \times \frac{0{,}7^n}{3} & \frac{2}{3}(1 - 0{,}7^n) \\ \frac{1 - 0{,}7^n}{3} & \frac{2 + 0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$$

4) En déduire la probabilités des états après 100 itérations.

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite de matrices définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_{n+1} = AU_n + B$, et de premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer l'état stable noté U.
2) Montrer que la suite définie, tout $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = U_n - U$ est une suite géométrique de la forme $V_{n+1} = AV_n$.
3) Donner l'expression de V_0 et celle de A.
4) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5) En déduire l'expression de V_n en fonction de n
6) Exprimer alors U_n en fonction de n
7) Donner la valeur de U_5 .