Exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 1 :

Prouver par récurrence les trois égalités ci-dessous $\forall n \in \mathbb{N}$

a) $1+2+3+4+.............+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+.............+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+3^3+4^3+.............+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2 :

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 \in [0;1]$ et $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+v_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Prouver par récurrence la propriété : $P_n : 0 \leq v_n \leq 1$

b) Prouver que (v_n) est croissante.

c) On pose $v_0 = \cos(\varphi)$ avec $\varphi \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer par récurrence, que $v_n = \cos(\dfrac{\varphi}{2^n})$

Exercice 3 :

Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2+n+2 est un nombre pair.

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

a) Calculer les premiers termes de la suite.
b) Conjecturer une expression pour le terme général u_n
c) Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 5 :

Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, 4^n+6n-1 est divisible par 9.

Exercice 6 :

a) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+n\dfrac{\pi}{2})$

b) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$

c) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$

Exercice 7 :

Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^n \geq (n+2)^2$

Exercice 8 :

Démontrer par récurrence que la suite définie par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est décroissante.

Exercice 9 :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$

1. Étudier la monotonie de (v_n)
2. Montrer par récurrence que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n > n^2$

Exercice 10 :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{n+1} = v_n(2 - v_n)$

Montrer que (v_n) est minorée par 0 et majorée par 1.

Exercice 11 :

Soit la suite (S_n) définie par : $\forall n \geq 1 \;\; S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite et conjecturer une expression de (S_n) en fonction de n.
2. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 12 :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

1. On admet que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x-3}$ est croissante sur son ensemble de définition $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$ .Tracer avec précision la courbe représentative de *f (Unité : 1 cm en abscisse, 3 cm en ordonnée)*, puis, à l'aide de la droite $y = x$, placer les 4 premiers points de la suite.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n), ainsi qu'un minorant et un majorant de cette suite.
3. Démontre les conjectures précédentes par deux récurrences distinctes.

Exercice 13 :

Reprendre les trois questions de l'exercice 12 avec :

Soit la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{7}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{n+1} = \sqrt{4v_n - 3}$

Exercice 14 :

Démontrer que : $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$

Exercice 15 :

On donne une suite définie par : $u_0 = 13$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$

Exercice 16 :

Montrer par récurrence que, $\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 17 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $\forall n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$

Exercice 18 :

On considère la suite (v_n) définie par : $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_{n+1} = 3v_n + n + 1$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

Exercice 19 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = 5u_n - 1$

Après avoir calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de (u_n) puis la démontrer par récurrence.

Exercice 20 :

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathrm{N}^*\ \ a^n - b^n = (a-b)\sum_{p=0}^{n-1} a^{n-1-p}b^p$

Aide : $a = (a-b)+b$

Exercice 21 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$

Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathrm{N}\ \ 2 \leq u_n \leq 3$

Exercice 22 :

On considère la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathrm{N}^*$ par : $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$

Démontrer que, $\forall n \in \mathrm{N}^*, u_1 = u_2 = 1$ et $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$

Exercice 23 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = u_0 = 1$ et $\forall n \geq 2\ \ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Cette suite est appelée suite de FIBONACCI.

On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Ce nombre est appelé le nombre d'or.

1) Vérifier que $\phi^2 = \phi + 1$
2) En déduire alors une expression de ϕ^3, ϕ^4 et ϕ^5 de la forme $a\phi + b$, avec a et b deux entiers.
3) Déduire des deux questions précédentes une expression de ϕ^n sous la forme $a\phi + b$
4) Démontrer alors cette conjecture avec un entier naturel quelconque n.

Aide : Calculer les premiers termes de la suite de FIBONACCI puis ouvrir les yeux…

Exercice 24 :

On considère la proposition suivante : $P_n : 9$ divise $10^n + 1$

1) Démontrer que, $\forall n \in \mathrm{N}$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.
2) Qu'en est-il de P_0, P_1, P_2 et P_3 ? Que semble-t-il légitimer de conjecturer ?
3) Montrer que, $\forall n \in \mathrm{N}$, Q_n : 9 divise $10^n - 1$
4) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, Démontrer que $\forall n \in \mathrm{N}\ \ P_n$: est fausse.

Exercice 25 :

Montrer, pour tout entier naturel n, que :

1) $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2) $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7

Exercice 26 : ***Principle of Mathematical induction***

Mathematical induction is a method of mathematical proof that involves two steps.
Let P_n denote a property applying to the natural number n and let n_0 be a given natural number.
If you want to show that for every $n \geq n_0$, P_n is true:

- ***Initial Step***: Check that P_{n_0} is true
- ***Inductive Step***: Assuming that P_n is true, show that P_{n+1} is true
- ***Conclusion***: For every $n \geq n_0$ P_n is true.

Putting into practice :

A sequence (v_n) is defined by $v_0 = 7$ and $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n + 8$

Prove that for any natural number $v_n = 10 - \frac{3}{5^n}$

Exercice 27 :

We consider the sequence (v_n) defined by $v_1 = 5$ and for any $n \geq 2$ $v_n = 2v_{n-1} - n$

Prove by induction that $v_n = 2(2^{n-1}+1)+n$ for all integers $n \geq 1$

Exercice 28 : *A quoi ça sert?*

On considère la suite(u_n) définie par:$\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par -3.
2) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n - 1$.
3) En déduire que (u_n) est croissante.
4) Montrer alors que (u_n) est convergente.