Exercices sur le logarithme

Exercice 1 :

Exprimer les quantités suivantes en fonction de $ln(x)$ et $ln(y)$ où x et y sont deux réels strictement positifs.

$$ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad ln(x^2y^5) \qquad ln\left(\frac{x}{y^2}\right) \qquad ln\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$$

Exercice 2 :

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

- $f(x) = ln(3-x)$
- $f(x) = ln\left(\frac{x}{x+7}\right)$
- $f(x) = ln(x+9) - ln(4-x)$
- $f(x) = \frac{ln(5+x)}{ln(x+2)}$

Exercice 3 : *Datation au carbone 14.*

Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. A sa mort, cette quantité de carbone 14 diminue. Si on note x la proportion de carbone 14 présente dans un organisme fossilisé alors son âge a est donné par $a(x) = -8310ln(x)$.

1) Quel est l'ensemble de définition de a ?
2) Calculer la dérivée de a puis préciser son signe.
3) Dresser le tableau de variation de a.
4) On veut représenter la fonction a. Quelles unités graphiques est-il possible de choisir ?
5) Tracer la courbe représentative de a.
6) Si on admet qu'on ne peut pas mesurer une proportion inférieure à 0,25%, quel est l'âge limite pour une datation au carbone 14 ?

Exercice 4 :

Monsieur Économe place 1 500 euros sur un compte d'épargne à intérêts composés au taux de 2 % l'an.
Dans combien d'années Monsieur X disposera-t-il d'un capital au moins égal à 3 000 euros ?

Exercice 5 :

On considère la fonction, $f: x \mapsto ln(x^2+1)$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Déterminer la dérivée de f.
3) Étudier le signe de $f'(x)$.
4) Dresser le tableau des variations de f.

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes (voir la fiche méthode)

- $ln(2x-3) = 0$
- $ln(5x+4) = 2$
- $ln(x^2+3x-4) - ln(3) = ln(2)$

Exercice 7 :

Résoudre les inéquations suivantes.

- $ln(x) - 2 \leq 0$
- $1 + ln(1+x) \geq 0$

Exercice 8 :

Résoudre l'équation : $ln^2(x) - 8ln(x) - 20 = 0$

Exercice 9 :

On note c la capacité pulmonaire en litre d'un individu en fonction de son âge x en années.
On admet que pour $x \geq 10$, on a la modélisation suivante :$c(x) = \frac{110(ln(x)-2)}{x}$

1) Calculer la dérivée de c.
2) Étudier le signe de $c'(x)$.
3) Dresser le tableau des variations de c.
4) A quel âge la capacité pulmonaire est-elle maximale et quelle est cette capacité maximale ?
5) Déterminer l'intervalle de temps durant lequel la capacité pulmonaire reste supérieure à 5 L.

Exercice 10 :

Après avoir déterminer leurs domaines de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 7ln(x) + 5x^2 + 3$
- $f(x) = 8xln(x) + 4$
- $f(x) = \frac{1+ln(x)}{1-ln(x)}$
- $f(x) = ln(7x^2 + 9x + 3)$
- $f(x) = 7ln(e^x + 4)$
- $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$

Exercice 11 :

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = ln(x) - 2x^2 - 1$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g.
   Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$Dresser le tableau de variation de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum.
2. Déduire du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle$]0; +\infty[$

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle$]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x - \frac{ln(x)}{x}$
On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.
Démontrer que pour tout x de l'intervalle$]0; +\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b. En utilisant la partie A déduire le signe de $f'(x)$ sur I' intervalle$]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .
c. Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse e.
d. Tracer la droite T et la courbe C dans le repère$(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie C : Calcul d'une aire

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$
1.On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h.
Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.
2. On désigne par A la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
a. Hachurer sur le graphique la partie du plan définie ci-dessus.
b. Calculer la valeur exacte du nombre réel A.

Exercice 12 :

On définit la fonction *f* sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; e\right]$ par $f(x) = x^2 ln(x)$.

1) Montrer que, pour tout réel *x* de l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; e\right]$, on a :
$f'(x) = x(2ln(x) + 1)$
2) Résoudre dans $\left[\frac{1}{e}; e\right]$ l'inéquation $2ln(x) + 1 \geq 0$.
3) Calculer les valeurs exactes de $f\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f(e)$.
4) Dresser le tableau complet des variations de *f* sur $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.
5) Résoudre dans $\left[\frac{1}{e}; e\right]$, à l'aide d'un théorème du cours, l'équation $f(x) = 2$.
6) Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = e$

Exercice 13 : QCM / 5 pts.

Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

1) On donne la fonction *f* définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ln(x) - \left(ln(x)\right)^2$.
La dérivée de *f*, définie également sur $]0; +\infty[$ est :

   a. $f'(x) = \frac{-1}{x}$
   b. $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x} ln(x)$
   c. $f'(x) = \frac{1-2ln(x)}{x}$
   d. Autre réponse.

2) On donne l'inéquation $1 - 2ln(x) \geq 0$, alors ses solutions sont:

   a. $S =]0; +\infty[$
   b. $S = \left]0; \frac{1}{2}\right]$
   c. $S = \left[0; \sqrt{e}\right[$
   d. $S = \left]0; \sqrt{e}\right]$

3) La fonction *f* définie à la première question est :

   a. Croissante sur $\left[\sqrt{e}; +\infty\right[$
   b. Décroissante sur $\left[\sqrt{e}; +\infty\right[$
   c. Positive sur $\left]0; \sqrt{e}\right]$
   d. Négative sur $\left[\sqrt{e}; +\infty\right[$

4) L'équation de la tangente à la courbe de *f* au point $x_0 = 1$ est donnée par:

   a. $(T): y = x$
   b. $(T): y = -x + 1$
   c. $(T): y = x - 1$
   d. $(T): y = -x$

5) La valeur exacte de l'image du nombre e^3 par f est :

   a. -6
   b. $e^3 - e^6$
   c. $3 - 3\left(ln(e)\right)^2$
   d. -6

Exercice 14 :

Partie A :

On définit la fonction *u* sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$par $u(x) = x^2 - 2 + ln(x)$.

1) Calculer l'expression de la dérivée de u, pour tout réel *x* de l'intervalle$\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$.
2) Calculer les ***valeurs exactes*** de $u\left(\frac{1}{e}\right)$ et $u(e^2)$.
3) Dresser le tableau complet des variations de *u* sur $\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$.
4) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur$\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$, notée α.
5) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie B :

On considère la fonction *f*, définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$ par : $f(x) = x^2 + \left(2 - ln(x)\right)^2$.

1) Déterminer l'expression de la dérivée de *f* pour tout *x* de$\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$. On prendra soin de faire apparaître la fonction étudiée dans la ***partie A***.
2) En déduire les variations de *f* sur $\left[\frac{1}{e} ; e^2\right]$
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $x_0 = e$