Exercices types BAC

Exercice 1 : Asie 2021 les suites numériques

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux comptait 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $2020 + n$.
Suivant cette modélisation, on a $u_0 = 1000$.

1. Calculer la valeur exacte de u_1.
2. Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250$
3. La fonction python, nommée suite est donnée ci-contre. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur retournée pour suite(10).

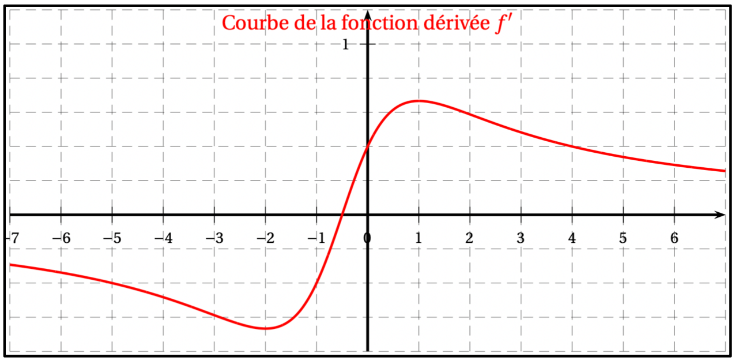
```python
def suite(n):
    u = 1000
    for i in range(n):
        u = 0.9*u + 250
    return u
```

4. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2500$.
5. Démontrer que (u_n) est croissante.
6. En déduire que la suite est convergente.
7. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2500$
   Montrer que (v_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = -1500$.
8. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2500$
9. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte.
10. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200. Déterminer cette année.

Exercice 2 : Asie 2021 le logarithme népérien

Partie I : Lecture graphique

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'



1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 0.
2) Donner les variations de la fonction dérivée f'
3) En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$

1) Calculer les limites de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
2) Déterminer l'expression de la dérivée de f pour tout x de $\mathbb{R}$.
3) En déduire le tableau de variation de f.
4) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution dans $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

5) Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.
6) Déterminer l'expression de la dérivée seconde de f, notée f'', pour tout x de $\mathbb{R}$.
7) Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f

<u>Exercice 3 :</u> Métropole 2021 Les probabilités

Dans cet exercice, les résultats demandés seront arrondis au millième si nécessaire.

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion des chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans le centre vétérinaire. Ce test possède les caractéristiques suivantes :

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90% des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants.

- M : le chat est porteur de la maladie.
- T : le test du chat est positif.

<u>Partie I :</u>

1) Traduire la situation par un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
3) Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est de 0,45.
4) On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

<u>Partie II :</u>

On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet qu'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chat présentant un test positif dans l'échantillon.

1) Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats positifs.
3) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats positifs.
4) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

<u>Partie III :</u>

Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = 1 - 0{,}55^n$
2) Décrire le rôle du code python ci-contre, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable p un nombre réel.
3) Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur retournée par ce code.

```python
def seuil():
  n = 0
  p = 0
  while p < 0.99:
    n = n + 1
    p = 1-0.55**n
  return n
```

Exercice 4 : Métropole 2021 Les suites numériques

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+4} \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3) Que peut-on en conclure pour la suite (u_n)
4) On considère la suite (v_n), définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{4}{u_n}$
   Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
5) En déduire l'expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
6) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
7) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 5 : Métropole 2021 Géométrie dans l'espace

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est correcte. Aucune justification n'est demandée.
L'espace est rapportée à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère :

1) La droite $(\mathcal{D})$ passant par les points $A(1; 1; -2)$ et $B(-1; 3; 2)$
2) La droite $(\mathcal{D}')$ de représentation paramétrique $(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
3) Le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $(\mathcal{P})$: $x + my - 2z + 8 = 0$

1	Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $(\mathcal{D}')$?			
	$M_1(-1; 3; -2)$	$M_2(11; -9; -22)$	$M_3(-7; 9; 2)$	$M_4(-2; 3; 4)$
2	Un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D}')$ est :			
	$\vec{u}_1(-4; 6; 8)$	$\vec{u}_2(3; 3; 6)$	$\vec{u}_3(3; -3; -6)$	$\vec{u}_4(-1; 3; 2)$
3	Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont :			
	Sécantes	Strictement parallèles	Non coplanaires	Confondues
4	La valeur du réel m pour laquelle $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$ est :			
	$m = -1$	$m = 1$	$m = 5$	$m = -2$

Exercice 6 : Métropole 2021 mars : logarithme népérien

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ln(x) + 2x - 2$

1) Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.
2) Déterminer le sens de variation de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$.
4) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(ln(x) - 1)$

1) On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que $\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\,,\, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
2) Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
4) Dresser le tableau de signe de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F, dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est f

1) Étudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.
2) La courbe $\mathcal{C}_F$ représentative de F sur $]0\,;\,+\infty[$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

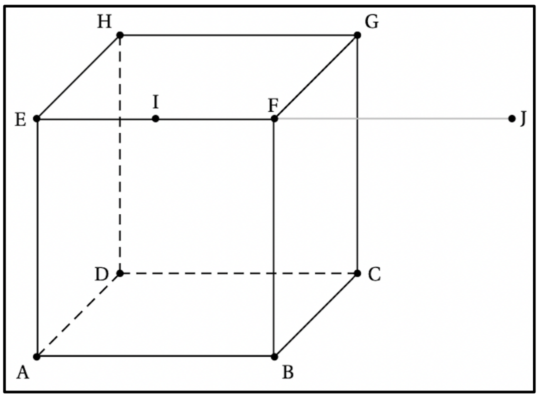
Exercice 7 : Métropole 2021 mars : la fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la limite de f au voisinage de $+\infty$
2) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}_f$.
3) Montrer que $\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[, f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$
4) Déterminer les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5) Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution de $f(x) = m$
6) On note $(\Delta): y = -x$. On note A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.
7) On note $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
   Déterminer l'expression de la dérivée de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
8) Dresser le tableau de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
9) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ

Exercice 8 : Métropole 2021 sujet 0: géométrie dans l'espace

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le milieu I de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F.



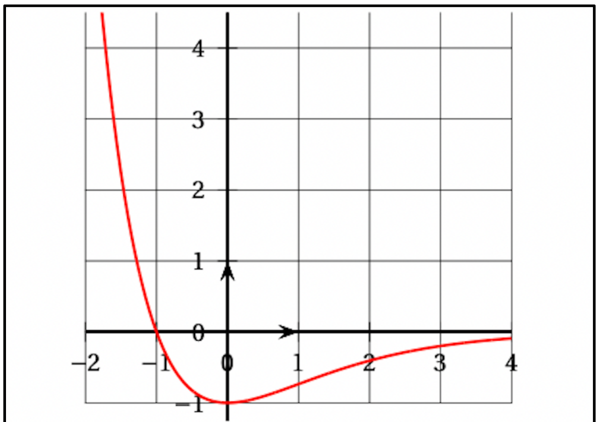
Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$

1) Donner les coordonnées des points I et J.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
3) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
4) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $(BGI): 2x - y + z - 2 = 0$
5) On note (d) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   Déterminer une représentation paramétrique de (d).
6) On considère le point L de coordonnées : $L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite (d) et du plan (BGI).
7) On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule :
   $$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$
   Où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
   Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.
8) En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 9 : Métropole 2021 mars : fonction exponentielle

Partie I :

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Par lecture graphique, conjecturer, en justifiant :

1) Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie II :</u>

On admet que la fonction f de la ***<u>partie I</u>*** admet pour expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et on admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$
   En déduire la limite de f au voisinage de $+\infty$. Justifier que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera. On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
   En déduire alors la construction du tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
3) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution dans $[-2;-1]$, notée α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1}près.
4) Déterminer l'expression de la dérivée seconde de f.
   En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
5) Que représente, pour la courbe $\mathcal{C}$, son point A, d'abscisse 0 ?

<u>Exercice 10 :</u> Suites et probabilités

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe. On considère que :

- Un salarié malade est absent ;
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade ;
- Si la semaine *n* le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04 ;
- Si la semaine *n* le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la *n*ième semaine ».
On note p_n la probabilité de l'événement E_n. Ainsi : $p_1 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq p_n \leq 1$.

1) Construire un arbre pondéré jusqu'à la 3ème semaine et le compléter.
2) Calculer la valeur de p_3.
3) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
4) Construire un arbre de probabilité pour la *n*ième semaine et la suivante.
5) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.
6) Montrer que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison *q*.
7) En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
8) Donner alors l'expression de p_n en fonction de *n*.
9) En déduire la limite de la suite (p_n).
10) On cherche à déterminer le nombre de semaines au bout desquelles la probabilité que le salarié soit absent devient supérieure à 0,04999. Déterminer cette année par la méthode de votre choix.

<u>Exercice 11 :</u> Amériques du Nord 2022 Vrai/faux exponentielle

Pour chacune des informations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1) ***<u>Affirmation 1 :</u>*** $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^{-x}+1}$
2) ***<u>Affirmation 2 :</u>*** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
   L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3) ***<u>Affirmation 3 :</u>*** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
   L'axe des abscisses est tangent à la courbe $(\mathcal{C})$ en un seul point.
4) ***<u>Affirmation 4 :</u>*** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1 - x^2)e^x$
   La courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.
5) ***<u>Affirmation 5 :</u>*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x+e^x} = 0$
6) ***<u>Affirmation 6 :</u>*** $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + e^{2x} \geq 2e^x$

<u>Exercice 12 :</u> Asie 2022 suites numériques

On s'intéresse au développement d'une bactérie. Dans cet exercice on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité de 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries, qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie. On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} p_0 = 0{,}3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7{p_n}^2 \end{cases}$$

La feuille de calcul ci-contre donne les premières valeurs approchées de (p_n)

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

1) Calculer les valeurs exactes de p_1 et de p_2.
2) Quelle est la probabilité, arrondie au millième, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
3) Conjecturer le sens de variation et la convergence de (p_n).
4) Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0{,}5$
5) Justifier que la suite (p_n) est convergente.
6) On appelle alors L la limite de(p_n). Justifier que L est solution de l'équation $0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$
7) En déduire alors la limite de (p_n).
8) Le code python ci-dessous a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n). Compléter ce code de façon que la fonction python retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
def suite(n):
  p = ...
  s =[p]
  for i in range(...):
    p = ....
    s.append(p)
  return (s)
```

Exercice 13 : Asie 2022 géométrie dans l'espace

L'espace est rapportée à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère les points.
$A(-3; 1; 3)$, $B(2; 2; 3)$, $C(1; 7; -1)$, $D(-4; 6; , -1)$ et $K(-3; 14; 14)$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, et $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
3. Calculer l'aire du rectangle $ABCD$.
4. Justifier que les points A, B, et D définissent un plan.
5. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2; 10; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD)
6. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
7. Donner une représentation paramétrique de la droite(Δ) orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
8. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I, projeté orthogonal de K sur (ABD).
9. Montrer que la hauteur de la pyramide $KABCD$ de base $ABCD$ et de sommet K vaut exactement $\sqrt{273}$.
10. Calculer alors le volume de cette pyramide. Pour rappel, $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$

Exercice 14 : Amériques du Nord QCM fonction et loi binomiale

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses est correcte. Aucune justification n'est demandée.

1	Le réel a défini par $a = ln(9) + ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :			
	$1 - \frac{1}{2}\, ln(3)$	$\frac{1}{2}\, ln(3)$	$3\, ln(3) + \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\, ln(3)$
2	On note (E) l'équation suivante : $(E): ln(x) + ln(x - 10) = ln3 + ln7$			
	3 est solution de (E)	$5 - \sqrt{46}$ est solution de (E)	(E) possède une seule solution	(E) admet deux solutions réelles
3	On a $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x^2(-1 + ln(x))$			
	$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$	f est croissante sur $]0; +\infty[$	$f'(\sqrt{e}) \neq 0$	$(d): y = \frac{-e}{2}$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$
4	Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millième est :			
	0,683	0,346	0,230	0,165
5	Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. La probabilité de tirer au moins 1 jeton jaune, arrondie au millième est :			
	0,078	0,259	0,337	0,922
6				

	Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces 5 tirages. Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois, alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes est égal à :			
	0,4	1,2	2	2,5

<u>Exercice 15 :</u> Amériques du Nord exponentielle, TVI et convexité.

<u>Partie A :</u>

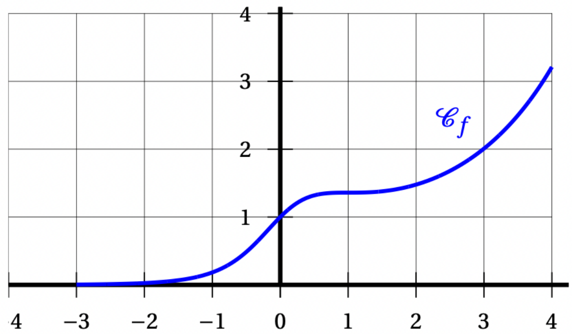
Soit p la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

1. Déterminer les variations de p sur $[-3; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3; 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée de α au dixième près.
4. En déduire le signe de p sur $[-3; 4]$.

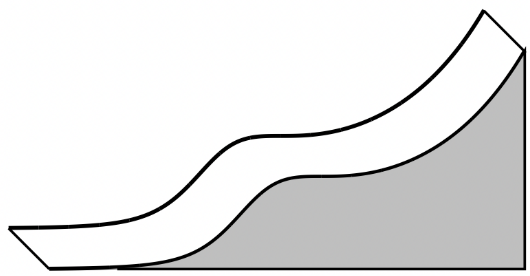
<u>Partie B :</u>

Soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f.
2. Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
3. Les concepteurs de tobogan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que ce tobogan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

4. D'après les graphiques ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est donnée par l'expression :
   $\forall x \in [-3; 4], f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression ci-dessus, répondre à la question :
   « Le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? » Justifier votre réponse.

<u>Exercice 16 :</u> Centres étrangers J1 Vrai/Faux exponentielle

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = e^3 - e^{-0,5t^2+t+2}$$

où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

A partir de cette modélisation, il propose les 3 affirmations ci-dessous.
Pour chaque affirmation, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

<u>Affirmation 1</u> : « la population augmente en permanence ».

<u>Affirmation 2</u> : « A très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».

<u>Affirmation 3</u> : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

<u>Exercice 17 :</u> Polynésie J1 Géométrie dans l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$. On considère :

- d_1 la droite passant par $H(2;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-1;1)$.
- d_2 la droite d'équation paramétrique (d_2): $\begin{cases} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}$ $, k \in \mathbb{R}$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire à d_1 et d_2.

1. a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
   b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
   c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
   d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2.

2. a. Vérifier que $\vec{w}(-1;2;3)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$. On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est : (P): $5x+4y-z-22=0$
   Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $M(3;3;5)$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M. Une représentation paramétrique de Δ est donnée par : (Δ): $\begin{cases} x = -r+3 \\ y = 2r+3 \\ z = 3r+5 \end{cases}$ $, r \in \mathbb{R}$
   a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

<u>Exercice 18 :</u> Centres étrangers J2 Suite et logarithme

On considère la fonction f définie sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = ln(2x+3) - 1$
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

<u>Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire</u>

On considère la fonction g définie sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$
On admet que la limite de g au voisinage de $+\infty$ est $-\infty$

1) Déterminer la limite de la fonction g en $-1{,}5$.
2) Étudier les variations de la fonction g sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$.
3) a. Démontrer que, dans l'intervalle $[-0{,}5\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

<u>Partie B : Étude de la suite (u_n)</u>

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1{,}5\,;\,+\infty[$

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1; \alpha]$, alors $f(x) \in [-1; \alpha]$
2. a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
   b. En déduire que (u_n) est une suite convergente.

<u>Exercice 19 :</u> Amériques du Nord 2024 suites d'intégrales et trigo

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :
$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} sin(x)dx$ et $J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} cos(x)dx$

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
   a) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0$
   c) En déduire que la suite(I_n) converge.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}dx$
   b) Montrer que, $\forall n \geq 1, \int_0^{\pi} e^{-nx}dx = \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$
   c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
3. a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :
$$\forall n \geq 1, I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \text{ et } I_n = \frac{1}{n}J_n$$
   b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$
4. On souhaite déterminer le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la 5ème ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import*
2  def seuil():
3    n = 0
4    I = 2
5
6      n = n + 1
7      I = (1+exp(1-n*pi)/(n*n+1))
8    return n
```

Exercice 20 : Bac 2023 Codes Python, Liste et dichotomie.

1. ***Vrai ou Faux ?***

On considère la fonction mystère définie ci-dessous qui prend une liste L de nombre en paramètre.
On rappelle que *len(L)* représente la longueur de la liste.

```
def mystere(L):
  S = 0
  for i in range(len(L)):
    S = S + L[i]
    return S/len(L)
```

Affirmation : l'exécution de mystere([1,9,9,5,0,3,6,12,0,5]) renvoie 50.

2. ***QCM***

Soient deux réels a et b tels que $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur $[a; b]$ et qui s'annule en un réel noté α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α au millième est :

a)

```
def racine(a,b):
  while abs(b-a) >= 0.001:
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0:
      b = m
    else:
      a = m
  return m
```

b)

```
def racine(a,b):
  m = (a+b)/2
  while abs(b-a) >= 0.001:
    if f(m) < 0:
      a = m
    else:
      b = m
  return m
```

c)

```
def racine(a,b):
   m = (a+b)/2
  while abs(b-a) <= 0.001:
    if f(m) < 0:
      a = m
    else:
      b = m
  return m
```

d)

```
def racine(a,b):
  while abs(b-a) >= 0.001:
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0:
      a = m
    else:
      b = m
  return m
```

3. ***Vrai ou Faux ?***

On considère la fonction mystère définie ci-dessous qui prend une liste L de nombre en paramètre.
On rappelle que *len(L)* représente la longueur de la liste.

```
def mystere(L):
  M = L[0]
  # On initialise M avec le premier élément de L
  for i in range(len(L)):
    if L[i] > M:
      M = L[i]
    return M
```

Affirmation : l'exécution de mystere([2,3,7,0,6,3,2,0,5]) renvoie 7.

Exercice 21 : Bac 2024 Centres étrangers, Dénombrement et somme de VA

Un sac opaque contient 8 jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. A trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans ce sac. Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéroté 4, puis le jeton numéroté 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4; 5; 1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché. Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

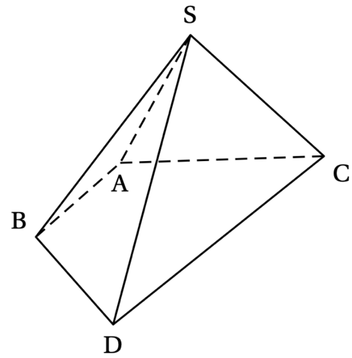
Exercice 22 : Bac 2024 Centres étrangers, Fonction exponentielles

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.
On admet que la fonction est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et on note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b) En déduire une interprétation graphique.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3) a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a : $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$
   b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]-\infty; 1[$.
4) On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a : $f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$
   a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$.
   b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a :
   $$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$
5) a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 1[$.
   b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

<u>Exercice 23 :</u> Bac 2024 Asie, volume d'un tétraèdre

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(3; -1; 1)$, $B(4; -1; 0)$, $C(0; 3; 2)$, $D(4; 3; -2)$ et $S(2; 1; 4)$. Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapezoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2) a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires
   b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$.
3) a)Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   d) On note I le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). Montrer alors que I a pour coordonnées $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$ puis montrer que $SI = 2\text{cm}$
4) a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $I(3; 3; -1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm
   b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.
5) Déterminer alors le volume de la pyramide $SABDC$.

<u>Exercice 24 :</u> Bac 2024 Asie, Vrai/ Faux sur les suites numériques

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera prise en compte.

<u>Affirmation 1 :</u>

Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0

<u>Affirmation 2 :</u>

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{-9^n+3^n}{7^n}$
Alors , $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

<u>Affirmation 3 :</u>

On considère la fonction suivante écrite en langage python :

```python
def terme(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = u + i
    return u
```

Alors $terme(4)$ renvoie la valeur 7.

<u>Affirmation 4 :</u>

Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- Prix A : il reçoit 1000 euros par jour pendant 15 jours.
- Prix B : il reçoit 1€ le 1er jour, 2 € le 2ème jour, 4 € le 3ème jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Alors, la valeur du Prix A est plus élevée que la valeur du Prix B.

Affirmation 5 :

On considère une suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que : $v_n = \int_1^n ln(x)dx$
Alors la suite (v_n) est croissante.

Exercice 25 : Bac 2024 Amériques, Suites numériques et logarithme

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$

1) Montrer que la fonction g est croissante sur $[0;1]$. Donner les valeurs de $g(0)$ et $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

2) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
3) Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5) Déterminer la limite l de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie $\forall n \in, v_n = ln(1 - u_n)$

6) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et donner v_0.
7) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
8) En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9) Recopier et compléter le script python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95:
        n = ......
        u = ......
    return n
```