Exercices sur initiation au calcul matriciel

Exercice 1 :

On donne les matrices suivantes. Donner leurs dimensions respectives

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- $F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Exercice2 :

On donne les matrices suivantes. Effectuer les opérations suivantes lorsqu'elles sont possibles.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

1) $A + B, 3B, 2C, 3B + 2C, A - 3B,$
2) $A \times B, A \times C, C \times A, A^2, A^2 \times B$

Exercice 3 :

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4

Exercice 4 :

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer les premières puissances de A.

Conjecturer une expression pour A^k. Écrire alors A^5 sans calculatrice.

Exercice 5 :

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ?

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel.

- $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -x + y = -2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ -x + y - z = -3 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - y - 2z = 3 \\ -x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$

Exercice 7:

Donner la matrice représentant une rotation de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Donner la matrice représentant une rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{6}$

Exercice 8 :

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Reconnaitre la transformation du plan et donner ses caractéristiques.

Exercice 9 :

1) Donner la matrice représentant une symétrie d'axe (xx'), notée A.
2) Donner la matrice représentant une symétrie d'axe (yy'), notée B.
3) Calculer $A \times B$ puis $B \times A$
4) Reconnaitre la transformation du plan représentée par $A \times B$

Exercice 10 :

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On donne $A(2;4)$ et $B(-1;7)$
1) Calculer les coordonnées de l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$
2) Calculer les coordonnées de l'image de B par la translation de vecteur $\vec{u}(2;4)$

Exercice 11 :

Un lycée commande régulièrement des feutres pour tableau blanc au prix de 0,90 € l'unité, des ramettes de 500 feuilles A4 à 4 € l'unité, des ramettes de feuilles A3 à 9 € l'unité et des enveloppes à 11,50 € le lot de 500.

On définit la matrice colonne $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 4 \\ 9 \\ 11{,}50 \end{pmatrix}$ qui donne le prix de ces fournitures.

1) Pour la rentrée, le lycée Michel Platini commande 750 feutres, 50 ramettes de feuilles A4, 30 ramettes de feuilles A3 et 2000 enveloppes.
   a) Traduire ces quantités par une matrice ligne notée Q.
   b) Quel produit doit-on effectuer pour calculer le coût total de la commande ?
2) Le fournisseur reçoit les commandes de trois lycées : Michel Platini, Léonard de Vinci et Jean Lurçat.
   Les quantités commandées sont respectivement données par la matrice :
   $R = \begin{pmatrix} 750 & 50 & 30 & 4 \\ 1000 & 80 & 40 & 8 \\ 1500 & 100 & 80 & 12 \end{pmatrix}$
   a) A quoi le coefficient 1000 correspond-il ? Interpréter également le coefficient 100.
   b) Calculer, à l'aide d'un produit matriciel, la facture pour chacun des lycées.

Exercice 12 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A \times B$ et $A \times C$
2) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 13 :

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit de ces deux matrices dans les deux sens.
Que penser du résultat ?

Exercice 14 :

On donne $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que $B^2 = 5B$.
2) Déterminer l'expression de B^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $A^2 - 2A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.