Exercices sur les vecteurs

Exercice 1 :

Soit un triangle ABC avec M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[AC]$. I et J appartiennent à $[BC]$ avec $BI = IJ = JC$. Les égalités suivantes sont-elles vraies :

a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{JC}$

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{NM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IB}$

Exercice 2 :

$ABCD$ est un parallélogramme. M, N, P et Q sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Expliquer pourquoi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

Exercice 3 :

$ABCD$ est un parallélogramme, M est le milieu de $[AB]$, N est le milieu de $[CD]$. E est un point quelconque du plan, extérieur au parallélogramme ABCD, I est le milieu de $[DE]$ et J est le milieu de $[CE]$.

Expliquer pourquoi $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM}$. Donner tous les vecteurs égaux sur cette figure.

Exercice 4 :

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle composé de trois triangles équilatéraux. On note I le milieu de la grande base $[AB]$ de ce trapèze.

1) Construire une figure traduisant cette situation.
2) Donnez trois couples de vecteurs égaux.
3) Construire l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4) Construire l'image de D dans la translation de vecteur $2\overrightarrow{DI}$.

Exercice 5 :

Construire un quadrilatère non croisé quelconque $ABCD$. Utilisez les points de la figure pour écrire $\overrightarrow{AB}$ comme la somme de trois vecteurs puis de quatre vecteurs.

Exercice 6 :

EFGH est un parallélogramme de centre O.

a) Construisez les points S et T tels que :
$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$
b) Pouvez que $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$
c) Que peut-on en déduire pour les points O, T et S ? Et pour le point O ?

Exercice 7 :

Ecrivez chacun des vecteurs suivants sous la forme d'un seul vecteur.

a) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$
b) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$
c) $\overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{GH}) - \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{CK}$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{AO}$

Exercice 8 :

Exprimer les vecteurs ci-dessous à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$ b) $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ c) $\vec{w} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$

Exercice 9 :

Soit ABC un triangle. E et D sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Construire une figure puis prouver que C est le milieu de $[DA]$.

Exercice 10 :

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. E et F sont deux points du plan qui vérifient :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
Construire une figure adaptée puis prouver que O est le milieu de $[EF]$

Exercice 11 :

Dans un triangle ABC, On note A' le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle.

a) Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.
b) Démontrer que G vérifie : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Rappel de collège : le centre de gravité est situé à $\frac{2}{3}$ du sommet sur chaque médiane.

Exercice 12 :

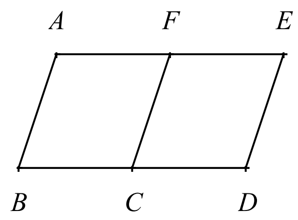
Soit A, B et C trois points non alignés.

1. Construire le point M image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Donner un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{MA}$.
3. Construire le point K tel que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CK}$ et démontrer que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AK}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AK}$ .Que peut-on en déduire pour le point A ?

Exercice 13 :

Sur la figure, $ABCF$ et $FEDC$ sont deux parallélogrammes tels que C et F sont les milieux respectifs de $[BD]$ et $[AE]$.
En utilisant uniquement les points de cette figure, donner :

a. Un vecteur égal à $\overrightarrow{CB}$.
b. Un vecteur égal à $\overrightarrow{CE}$.
c. Un vecteur n'ayant pas la même direction que $\overrightarrow{CB}$.
d. L'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.
e. Un vecteur égal à $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE}$.
f. Un vecteur égal à $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.



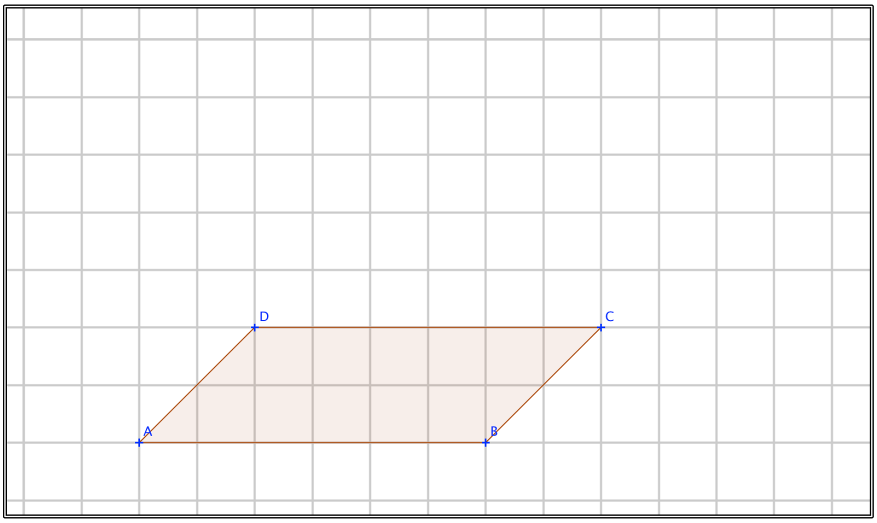
Exercice 14 :

1) Placer trois points A, D et C non alignés et construire le point B tel que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.
2) La parallèle à (AC) passant par B coupe (AD) en E et (DC) en F.
Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$
En déduire que B est milieu de $[EF]$.
3) On note O le point d'intersection des diagonales du parallélogramme $ABCD$ et O' son symétrique par rapport à B.
Démontrer que $\overrightarrow{EO'} = \overrightarrow{OF}$

Exercice 15 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient M et N les points définis par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$

1) Compléter la figure ci-dessous en plaçant les points M et N.
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4) En déduire alors que les points C, M et N sont alignés.



Exercice 16 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Soient M et N les points définis par $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM}$

Construire une figure puis prouver que les points C, D et N sont alignés.

Exercice 17 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note E le milieu de $[BC]$

Soit A', le symétrique de A par rapport à B.

Construire une figure puis prouver que les points A', D et E sont alignés.

Exercice 18 :

Soit ABC un triangle quelconque.

Soient M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On note I le milieu de $[MN]$ et J le milieu de $[BC]$

Construire une figure puis prouver que les points A, I et J sont alignés.