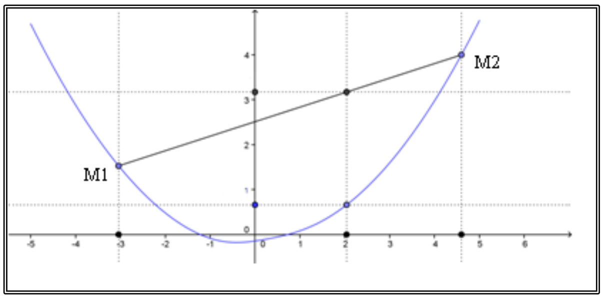
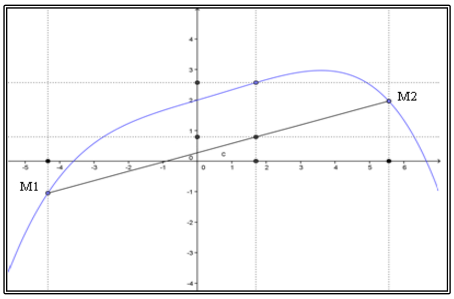
Dérivation et convexité

Rappel :



Graphe d'une fonction Convexe



Graphe d'une fonction Concave

Exercice 1 :

A l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative des fonctions ci-dessous sur l'intervalle [0 ; 2] et indiquez si la fonction vous semble convexe, concave ou ni l'un, ni l'autre sur [0 ; 2].

- $f(x) = 5x^3 - 8x + 2$
- $f(x) = x\sqrt{x} - x^2$
- $f(x) = e^x - \ln(x+1)$
- $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 + 1}$

Exercice 2 :

On donne trois points *A*, *B* et *C* situés sur la représentation graphique d'une fonction *f*, définie et dérivable sur [1 ; 5] et qui est soit convexe, soit concave. Placer ces points dans un repère, construire une courbe possible et indiquer si *f* est convexe ou concave.

- *A(1 ;5), B(3 ;3)* et *C(5 ;2)*
- *A(1 ;-5), B(3 ;3)* et *C(5 ;-3)*

Exercice 3 :

On donne les équations de tangentes en 3 points *A, B, C* de la courbe représentative d'une fonction *f* définie et dérivable sur [0 ; 6]. Les points ont pour abscisse respective 1, 3, 5. Expliquer pourquoi *f* ne peut être ni convexe, ni concave
On a : $T_A : y = -x + 3$, $T_B : y = 5$ et $T_C : y = -x + 9$

Exercice 4 :

f est une fonction dérivable et concave sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse -1 a pour équation $T : y = -x + 2$
Les inégalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- $f(0) < 3$
- $f(2) > 0$
- $f(-3) \leq -5$

Exercice 5 :

f est une fonction concave sur $\mathbb{R}$. Indiquer si la fonction *g* est convexe ou concave sur son ensemble de définition.

- $g(x) = -5f(x) + 3x^2 + x$
- $g(x) = 7f(x) - 5e^x$

Exercice 6 :

Pour chaque fonction ci-dessous définie sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée seconde et déduisez en les intervalles où *f* est convexe ou concave et les points d'inflexion éventuels.

- $f(x) = 4x^2 - 16x + 15$
- $f(x) = x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 4$
- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 1$
- $f(x) = xe^x + x - 1$

Exercice 7 :

f est une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. La tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 1 a pour équation : $T : y = 3$

1. Expliquer pourquoi pour tout réel *x*, $f(x) > 0$
2. Montrer que *f'* est négative sur $]-\infty;1[$ et positive sur $]1;+\infty[$.
3. Donner alors le tableau de variation de *f*.

Exercice 8 :

Une entreprise fabrique un produit liquide et sa production peut varier de 0 à 15 hectolitres par jour. On suppose que tout le produit fabriqué est vendu.
On note $C(x)$ en milliers d'euros le coût moyen de fabrication d'un hectolitre et $p(x)$le prix de vente d'un hectolitre pour *x* hectolitres fabriqués.
On suppose que $C(x) = 0{,}5x + \dfrac{8}{x}$ et que $p(x) = -0{,}8x + 13$ avec $0 \le x \le 15$

1. Démontrer que *C* est une fonction convexe sur [0 ; 15]
2. Déduisez-en l'intervalle dans lequel doit se situer *x* pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

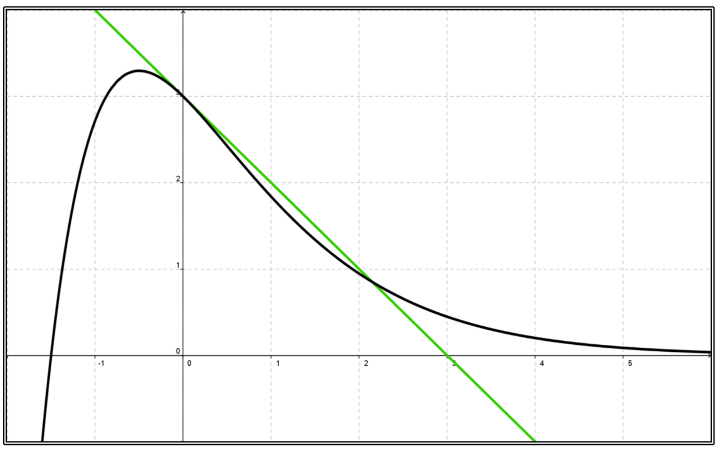
Exercice 9 :

Soit $f(x) = ln(x^2 + 1)$. Etudier alors sa convexité sur $\mathbb{R}$. Déterminer si la courbe représentative de *f* possède des points d'inflexions, et si oui, donner leurs coordonnées.

Exercice 10 :

La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax + b)e^{-x}$

1) A. Déterminer par lecture graphique $f(0)$
   B. Déterminer par lecture graphique $f'(0)$
   C. Pensez vous que fonction semble convexe sur [0 :6] ?
2) A. Exprimer f'en fonction de *a* et *b*.
   B. A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer les valeurs de *a* et *b* puis de l'expression de *f*
   C. Calculer alors f''
   D. Indiquer alors sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ *f* est convexe et celui sur lequel elle est concave.
3) Déterminer le point d'inflexion de la courbe et une équation de la tangente en ce point.



Exercice 11 :

Soit la fonction $f(x) = -5x^2 + 7x - 8$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 12 :

Soit la fonction $f(x) = (1 - x^2)(3x + 5)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 13 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 14 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{3+2x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 15 :

Calculer l'expression de la dérivée de toutes les fonctions ci-dessous.

- $f(x) = 7x^3 - 5x^2 - 8x + 7$
- $f(x) = 12x^5 + \pi x - \sqrt{2}$
- $f(x) = \frac{5}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^2 + 8$
- $f(x) = (5 + 3x^2)(x - 7)$
- $f(x) = -7\sqrt{x} + \frac{-5}{x^3} + 9x$
- $f(x) = \frac{-1}{3}x^6 + \frac{1}{x^4} - \frac{5}{4}x^2 + 8x$

Exercice 16 :

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

Exercice 17 :

Soit la fonction $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = -2$

Exercice 18 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{5+2x}{1+x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

Exercice 19 :

Soit la fonction $f(x) = (1 - 5x^2)(7x - 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 0$

Exercice 20 :

Pour chaque fonction ci-dessous, donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

- $f(x) = (1 - x)^2$
- $f(x) = 7x - 5\sqrt{x}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$
- $f(x) = (1 - \sqrt{x})(4x + 7)$
- $f(x) = (x^3 - x^2)(x^2 - 1)$
- $f(\omega) = \frac{R\omega}{1-\omega^2}$

Exercice 21 :

Soit la fonction $f(x) = ax + b\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ ou a et b sont deux réels non nul.
Si la tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?

Exercice 22 :

Soit la fonction $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ ou a et b sont deux réels non nul.
Déterminer les valeurs de a et b dans chacun des deux cas suivants.

1) La tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 a pour équation $T: y = 3x - 2$.
2) La tangente à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en -1 et l'axe des abscisses en -2.

Exercice 23 :

Un véhicule roule en ligne droite. La distance $d(t)$, exprimée en mètres, parcourue par le véhicule en fonction du temps est donnée par la formule $d(t) = 2t^2 + t$, où t est exprimé en secondes.

1) Quelle distance le véhicule a-t-il parcourue à l'instant$t = 10$?
2) Pour $h \neq 0$, calculer la vitesse moyenne du véhicule entre les instants 10 et $10 + h$.
3) Déterminer, en utilisant le dernier calcul, la vitesse instantanée du véhicule à l'instant $t = 10$.