# Correction Évaluation sur Variables aléatoires

NOM :……………………………………… PRENOM :……………………….. SUJET A

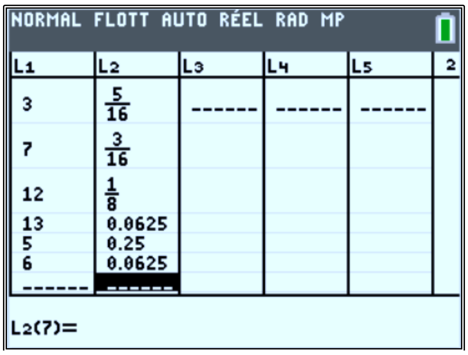
***Exercice 1 :*** *Avec la calculatrice* / 3 pts

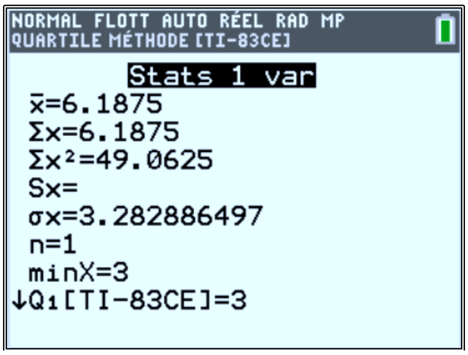
On donne la loi de probabilité suivante.

| $X = x_i$ | *3* | *7* | *12* | *13* | *5* | *6* | *Total* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$ |

A l'aide de votre calculatrice, donner les informations suivantes :

- $E(X) = 6{,}1875$
- $V(X)$=10,777

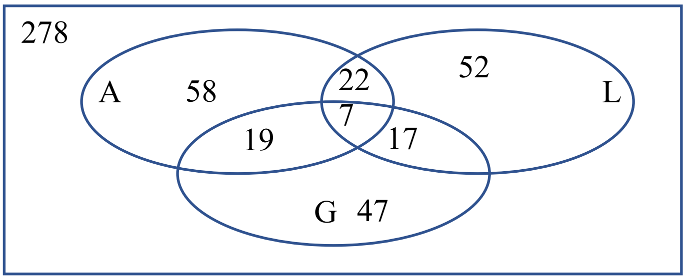



***Exercice 2 :*** / 5 pts

Une étude médicale s'intéresse aux cas d'allergies sur une population de 500 individus. Parmi tous les individus, 58 présentent une seule allergie aux acariens (A), 47 présentent seulement l'allergie au gluten (G), 52 présentent une seule allergie au lactose (L). De plus, 19 individus présentent les allergies A et G, 22 les allergies A et L et 17 les allergies G et L. Enfin, 7 individus présentent les trois allergies.

1) Compléter le diagramme de Venn ci-dessous.




2) On choisit un individu au hasard dans cette population. On note *S* la variable aléatoire donnant le nombre d'allergies présentes parmi A, G et L.
Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de *S*.

| $S = s_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(S = s_i)$ | $\frac{278}{500}$ | $\frac{157}{500}$ | $\frac{58}{500}$ | $\frac{7}{500}$ | 1 |
| $s_i p_i$ | 0 | $\frac{157}{500}$ | $\frac{116}{500}$ | $\frac{21}{500}$ | $E(S) = \frac{294}{500}$ |
| $s_i{}^2 p_i$ | 0 | $\frac{157}{500}$ | $\frac{232}{500}$ | $\frac{63}{500}$ | $\frac{452}{500}$ |

3) A l'aide du tableau, calculer l'espérance mathématiques de $S$ et son écart-type. $E(S) = \frac{294}{500}$ *et* $V(X) = 0{,}156$ et donc $\sigma(X) = 0{,}395$
4) Le traitement antihistaminique coûte 20 euros par allergie traitée. Calculer le coût moyen par individu sur cette population. $E(S) = 0{,}588$ soit un cout de 11,76 €

***Exercice 3 :*** / 2 pts

Les données d'un exercice de probabilité ont conduit au tableau suivant :

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0,2 | 0,2 | 0,4 |
| $\overline{A}$ | 0,1 | 0,5 | 0,6 |
| | 0,3 | 0,7 | 1 |

Calculer $P(A \cup B)$

On utilise la formule de Poincaré : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Soit ici $P(A \cup B)$ =0,5

***Exercice 4 :*** / 4 pts

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble $\Omega$ des couples$(x\,;\,y)$ avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$ est muni d'une loi équirépartie. A chaque couple $(x\,;\,y)$ , on associe $|x - y|$. On définit ainsi une variable aléatoire $X$ sur $\Omega$.

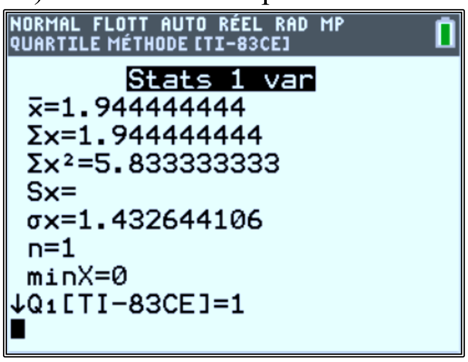
1) Compléter le tableau ci-dessous.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

2) Compléter la loi de probabilité de $X$

| $X = x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | 1 |

3) Calculer son espérance et son écart-type à l'aide de votre calculatrice.




donc $E(X) = 1{,}94$ et $\sigma(X) = 1{,}43$

***Exercice 5 :*** / 6 pts

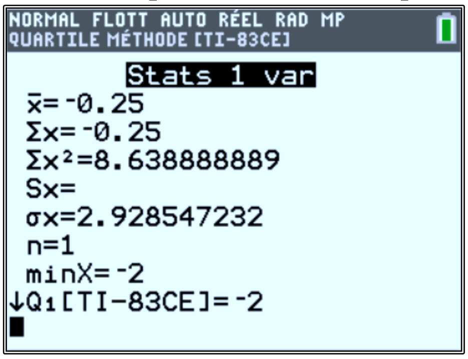
Pour une mise de 2 €, un joueur choisit un numéro compris entre 1 et 6, lance deux dés cubiques bien équilibrés et observe combien de fois son numéro est sorti. Le joueur gagne 13€ si son numéro sort sur chaque dé, 5€ s'il n'apparaît que sur un seul dé et perd sa mise sinon.

On désigne par $X$ la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur à l'issue d'un lancer.

1) Compléter la loi de probabilité suivante.

| $X = x_i$ | 11 | 3 | -2 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{25}{36}$ | 1 |

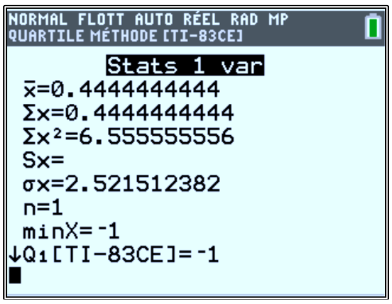
2) Donner l'espérance mathématiques de $X$ et sa variance.




donc $E(X) = -0{,}25$ et $V(X) = 8{,}57$

3) Interpréter l'espérance et indiquer si ce jeu est équitable.
Le jeu est défavorable au joueur car l'espérance est négative.

4) L'organisateur envisage de minorer la mise et les gains prévus de 1 € afin d'attirer davantage de joueurs. On désigne par $Y$ le nouveau gain algébrique du joueur.
Donner l'espérance et la variance de $Y$.
Si la mise est diminuée de 1 euros et les gains aussi, les valeurs possibles pour le gain deviennent alors :11, 3 et – 1. il y a donc un changement pour l'espérance et pour la variance.




5) Après réflexion, l'organisateur décide de multiplier les gains et la mise par deux.
Quelle sera l'influence sur le gain algébrique du joueur ?
L'univers des possibles devient donc : $\Omega = \{22\ ;\ 6\ ; -4\}$
On a donc $Z = 2X$ donc $E(Z) = -0{,}5$ et $V(Z) = 34$

6) Laquelle des trois situations est la plus favorable au joueur ?
C'est donc la deuxième situation qui est la meilleure pour le joueur.