Correction évaluation sur le produit scalaire

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : *Calculs basiques* / 2 pts

On donne les points $A(3\,;7)$, $B(5\,;12)$, $C(6\,;4)$, $D(1\,;6)$.
Que peut-on dire des droites (AB) et (CD).

Correction :

On évalue les coordonnées des deux vecteurs : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$
On évalue $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 2\times(-5)+5\times 2$ soit donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ; les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2 : / 2 pts

Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 7$ et $AC = 8$ et $\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Correction :

On a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7\times 8\times cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ soit donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -28$

Exercice 3 : / 3 pts

Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$. Déterminer CB

Correction :

On écrit la formule d'Al-Kashi en cherchant soit une longueur, soit un angle :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\times c\times cos(\hat{A})$ devient $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times cos\left(\widehat{BAC}\right)$
$BC^2 = 4 + 16 + 4\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ soit donc $BC = \sqrt{20+8\sqrt{2}}$

Exercice 4 : / 4 pts

1) On donne l'équation : $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un cercle dont on donnera les caractéristiques.
2) On donne l'équation $(x-5)(x+9)+(y+2)(y-3) = 0$.
Retrouver ses caractéristiques.

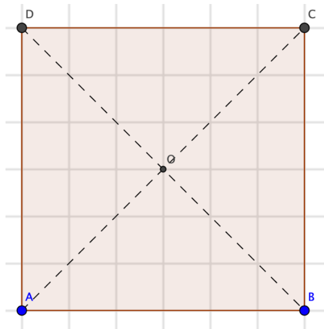
Correction :

1) On utilise ici une technique bien connue : la forme canonique.
$x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$
On reconnaît l'équation d'un cercle de centre $A(6\,;\,-8)$ et de rayon $r = 10$
2) $(x-5)(x+9)+(y+2)(y-3) = 0$
Deux réponses sont possibles :
   - Si on pose $A(5\,;\,-2)$ et $B(-9\,;\,3)$, on obtient le cercle de diamètre $[AB]$ avec pour centre $\Omega(-2\,;\,0{,}5)$ et pour rayon $r = \frac{AB}{2}$ soit $r = \frac{\sqrt{221}}{2}$
   - Si on pose $C(5\,;\,3)$ et $D(-9\,;\,-2)$, on obtient le cercle de diamètre $[CD]$ avec pour centre $\Omega(-2\,;\,0{,}5)$ et pour rayon $r = \frac{CD}{2}$ soit $r = \frac{\sqrt{221}}{2}$

   Ce qui prouve l'unicité de l'ensemble de points.

Exercice 5 : / 4 pts

$ABCD$ est un carré de centre 0 et de côté 2.



Calculer les produits scalaires suivants.

- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} = 4$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} = 0$
- $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB} = -2$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OA} = -4$
- $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = -4$
- $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} = 0$

Exercice 6 : / 3 pts

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 7$.
Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près.

Correction :

On écrit l'égalité d'AL-Kashi.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times c \times cos(\hat{A})$ devient :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$
$49 = 16 + 36 - 48 \times cos(\widehat{BAC})$
Soit donc $cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{48}$ soit $\widehat{BAC} \approx 86{,}4°$

Exercice 7 : / 2 pts

On donne les vecteurs $\vec{u}(3; 5)$ et $\vec{v}(-10{,}5; x)$
Déterminer la valeur de x afin que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Correction :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
On résout alors une équation $3 \times (-10{,}5) + 5x = 0$
Soit alors $x = \frac{31{,}5}{5}$ et donc $x = 6{,}3$