EVALUATION SUR LES PROBABILITÉS

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET B

Exercice 1 : *Tableau à double entrées et arbre* / 5 pts

On choisit au hasard un élève dans un lycée. On définit les évènements :

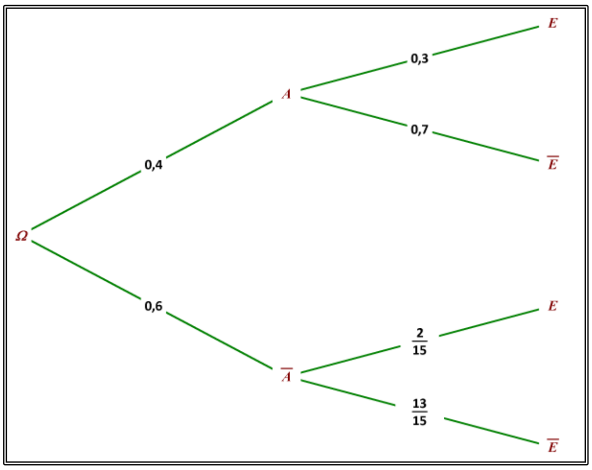
- A l'événement : « l'élève étudie l'anglais ».
- E l'événement : « l'élève est externe ».

	E	$\bar{E}$	
A	0,12	0,28	0,4
$\bar{A}$	0,08	0,52	0,6
	0,2	0,80	1

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) Déterminer par le calcul $P_A(E)$.
3) Construire un arbre de probabilité commençant par l'évènement A.
4) Calculer $P_{\bar{E}}(\bar{A})$.

Correction :

1) On complète le tableau ci-dessus par addition et soustraction.
2) A l'aide de la formule, on a :
$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)}$ soit donc $P_A(E) = \frac{0,12}{0,40}$ soit $P_A(E) = 0,3$
$P_{\bar{A}}(E) = \frac{P(\bar{A} \cap E)}{P(\bar{A})}$ soit donc $P_{\bar{A}}(E) = \frac{0,08}{0,6}$ soit $P_{\bar{A}}(E) = \frac{2}{15}$
3) $P_{\bar{E}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{E})}{P(\bar{E})}$ soit donc $P_{\bar{E}}(\bar{A}) = \frac{0,52}{0,8}$ soit $P_{\bar{E}}(\bar{A}) = \frac{13}{20}$ soit $P_A(E) = 0,65$



Exercice 2 : / 8 pts

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques emportés par les voyageurs. On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique et on considère les évènements suivants.

- S l'événement : « le voyageur fait sonner le portique ».
- M l'événement : « le voyageur porte un objet métallique. ».

On sait de plus que :

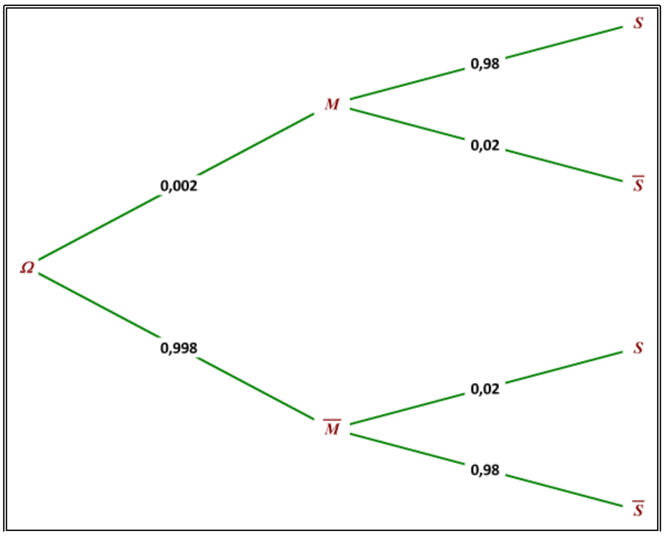
- 1 voyageur sur 500 porte un objet métallique.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est de 0,98.
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans un objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,98.

1) Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2) D'après les données de l'énoncé, donner $P(M)$ et $P_M(S)$.

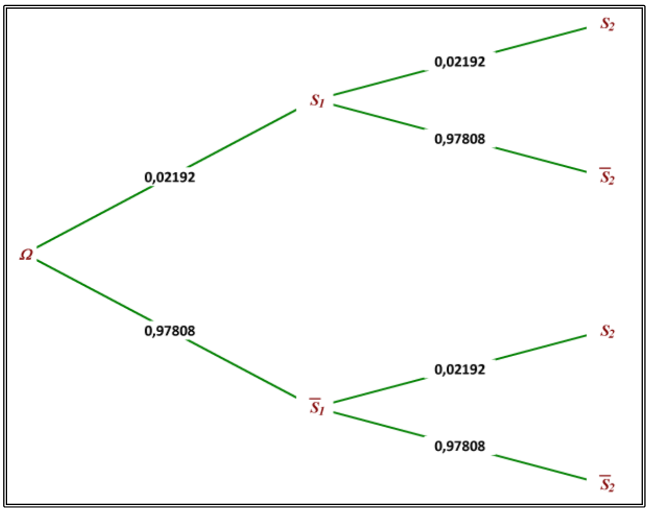
3) Calculer $P(M \cap S)$ et traduire cet évènement par une phrase.
4) Démontrer que la probabilité que le voyageur fasse sonner le portique vaut 0,02192
5) Déterminer la probabilité que le voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique.
6) Deux voyageurs qui ne se connaissent pas approchent du portique pour prendre leur vol. On suppose que pour chaque voyageur, la probabilité que le portique sonne vaut 0,02192.
   Calculer la probabilité qu'une seule des deux personnes fasse sonner le portique. (On pourra s'aider d'un arbre).

<u>Correction :</u>

1) Avec les données de l'énoncé, on construit l'arbre de probabilité.



2) Avec les données de l'énoncé, on a : $P(M) = 0{,}002$ et $P_M(S) = 0{,}98$
3) $M \cap S$ est l'évènement « le voyageur possède un objet métallique et fait sonner le portique.
   $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S)$
   $P(M \cap S) = 0{,}002 \times 0{,}98$
   $P(M \cap S) = 0{,}00196$
4) A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :
   $P(S) = P(M \cap S) + P(S \cap \overline{M})$
   $P(S) = P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S)$
   $P(S) = 0{,}00196 + 0{,}998 \times 0{,}02$
   $P(S) = 0{,}02192$
5) On inverse le conditionnement. (On retourne l'arbre)
   $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)}$
   $P_S(M) = \frac{0{,}00196}{0{,}02192}$ soit donc $P_S(M) = \frac{49}{548}$ soit $P_S(M) \approx 0{,}0894$
6) Il s'agit d'une répétition d'épreuves identiques et indépendantes. Il n'y a pas de probabilités conditionnelles ici.
   On construit un arbre. On veut qu'une seule personne fasse sonner le portique. On note A cet évènement.



On a alors :
$P(A) = P(S_1 \cap \overline{S_2}) + P(S_2 \cap \overline{S_1})$
$P(A) = P(S_1) \times P(\overline{S_2}) + P(S_2) \times P(\overline{S_1})$
$P(A) = 0{,}02192 \times 0{,}97808 + 0{,}02192 \times 0{,}97808$
$P(A) \approx 0{,}043$

Exercice 3 / 4 pts

1) Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}2$ et $P(A \cup B) = 0{,}44$
Les évènements A et B sont-ils indépendants,

2) Soient deux évènements C et D, indépendants tels que $P(C) = 0{,}3$ et $P(D) = 0{,}7$.
Calculer alors $P(C \cup D)$

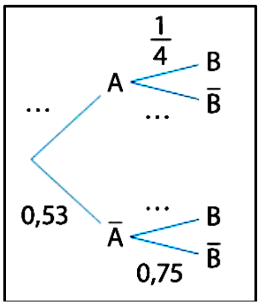
Correction :

1) On utilise la formule de Poincaré :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$0{,}44 = 0{,}3 + 0{,}2 - P(A \cap B)$ Soit donc $P(A \cap B) = 0{,}06$
$P(B) \times P(A) = 0{,}3 \times 0{,}2$ soit $P(B) \times P(A) = 0{,}06$
Les évènements A et B sont donc indépendants.

2) Puisque C et D sont indépendants, on a : $P(C \cap D) = P(C) \times P(D)$
Soit alors $P(C \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}7$ et donc $P(C \cap D) = 0{,}21$
A l'aide de la formule de Poincaré,
$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$
$P(C \cup D) = 0{,}3 + 0{,}7 - 0{,}21$ soit au final $P(C \cup D) = 0{,}79$

Exercice 4 / 3 pts

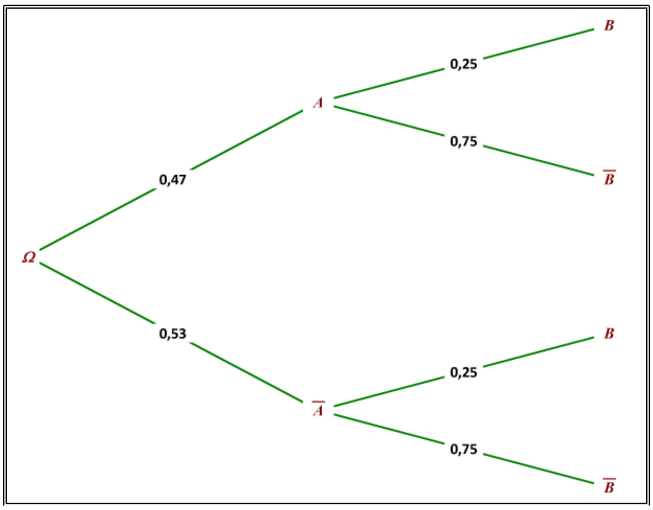
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-dessous.



Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Correction :

On complète l'arbre de probabilité.



A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

$P(B) = 0{,}47 \times 0{,}25 + 0{,}53 \times 0{,}25$

Soit donc $P(B) = 0{,}25$

Puisque $P_A(B) = P(B)$ les évènements sont indépendants.