Correction Evaluation de Mathématiques

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 2 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 8x - 2$
Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 3$

Correction :

On évalue d'abord :
$f(3) = 31$ puis $f(3+h) = (3+h)^2 + 8(3+h) - 2$ soit $f(3+h) = h^2 + 14h + 31$
On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 3.

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3} = \frac{h^2 + 14h + 31 - 31}{h} = h + 14$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers 14. Ce nombre est réel et on peut donc conclure que f est dérivable en 3 et que $f'(3) = 14$

Exercice 2 : / 2 pts

On donne la fonction f définie sur $[5\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-5} - 3$
Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 9$

Correction :

On évalue d'abord :
$f(9) = -1$ puis $f(9+h) = \sqrt{4+h} - 3$
On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 0.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{0+h-0} = \frac{\sqrt{4+h} - 3 + 1}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{(\sqrt{4+h} + 2)}$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers $\frac{1}{4}$. Ce nombre est réel et on peut donc conclure que f est dérivable en 9 et que $f'(9) = \frac{1}{4}$

Exercice 3 : / 2 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 2$

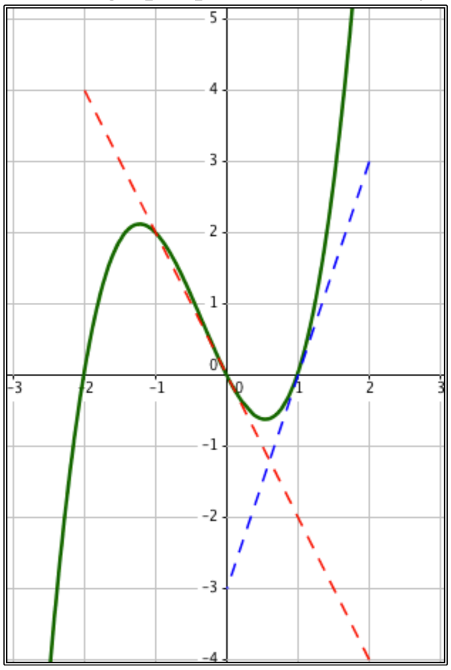
Correction :

On évalue d'abord :
$f(2) = 1$ puis $f(2+h) = \frac{-1-h}{-1+h}$
On évalue ensuite l'expression du taux d'accroissement de f en 2.
$\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{\frac{-1-h}{-1+h}-1}{h}$ Ce taux d'accroissement se simplifie alors en réduisant au même dénominateur : $\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{\frac{-2h}{(-1+h)}}{h}$ soit alors $\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \frac{-2}{(-1+h)}$

Lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers 2. On a donc que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 2$ donc $T: y = 2x - 3$

Exercice 4 : / 3 pts

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

1) Donner les valeurs de $f'(0)$ et $f'(1)$
2) Donner les équations de T_0 et de T_1
3) Quel est le signe de $f'(-2)$
4) Construire le tableau de variation de f sur $[-2\,;1]$

Correction :

Par lecture graphique, on a :

1) $f'(0) = -2$ et $f'(1) = 3$
2) $T_0 : y = -2x$ et $T_1 : y = 3x - 3$
3) $f'(-2) > 0$ car la droite monte.
4)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{7}\right)$		$\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$\frac{2}{27}\left(10+7\sqrt{7}\right)$	$\searrow$	$-\frac{2}{27}\left(7\sqrt{7}-10\right)$	$\nearrow$	

Exercice 5 : / 6 pts

Calculer l'expression de la dérivée de toutes les fonctions ci-dessous.

- $f(x) = 5x^3 - 2x^2 - 6x + 73$
- $f(x) = 4x^5 - \pi x - \sqrt{3}$
- $f(x) = \frac{7}{6}x^6 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 81$
- $f(x) = (-3 + x^2)(x + 8)$
- $f(x) = -5\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} - 2x$
- $f(x) = \frac{-1}{3}x^9 + \frac{1}{x^5} - \frac{5}{6}x^2 + 7x$

Correction :

Calculer l'expression de la dérivée de toutes les fonctions ci-dessous.

- $f'(x) = 15x^2 - 4x - 6$
- $f'(x) = 20x^4 - \pi$
- $f'(x) = 7x^5 + 5x^3 - \frac{10}{3}x$
- $f'(x) = 3x^2 + 16x - 3$
- $f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^4} - 2$
- $f'(x) = -3x^8 - \frac{5}{x^6} - \frac{5}{3}x + 7$

Exercice 6 : / 1,5 pts

Soit la fonction $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de sa dérivée

Correction :

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$
On pourrait développer l'expression et calculer la dérivée termes à termes.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$u(x) = 1 - x \qquad v(x) = 1 + x^2$$
$$u'(x) = -1 \qquad v'(x) = 2x$$

On a alors $f'(x) = \frac{-(1+x^2)-2x(1-x)}{(1+x^2)^2}$

Soit donc $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

Exercice 7 : / 1,5 pts

Soit la fonction $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = -1$

Correction :

On a $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ soit en dérivant $f'(x) = 3x^2 - 8x + 7$
On évalue alors $f(-1) = -13$ et $f'(-1) = 18$
On a donc $T_{-1}: y = 18(x+1) - 13$ soit donc $T_{-1}: y = 18x + 5$

Exercice 8 : / 2 pts

Soient les fonctions $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 2$ définies sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer par le calcul que les représentations graphiques de ces deux fonctions n'ont qu'un seul point en commun, appelé A.
2) Montrer que les deux représentations graphiques sont tangentes en A.

Correction :

On cherche un point tels que $f(x) = g(x)$ soit ici $x^2 + 2x = -x^2 + 6x - 2$
Il faut résoudre $2x^2 - 4x + 2 = 0$ qui se simplifie $x^2 - 2x + 1 = 0$
On reconnaît une identité remarquable qui s'annule en 1
On évalue les fonctions dérivées :
$f'(x) = 2x + 2$ et $g'(x) = -2x + 6$
On a $f'(1) = 4$ et $g'(1) = 4$