Correction Évaluation sur convexité et dérivation

NOM :…………………………………. PRENOM :……………………… SUJET B

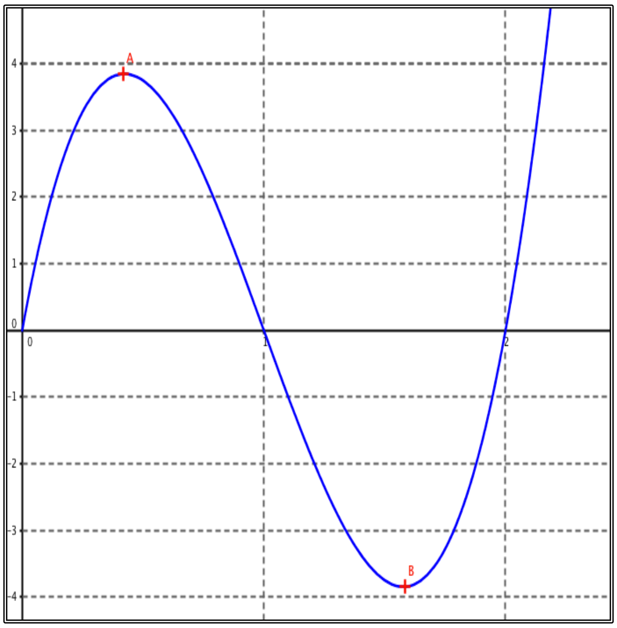
Exercice 1 : / 5 pts

On donne la fonction $f(x) = 2x^4 + x^3 - 15x^2 - 5x + 10$
Étudier la convexité de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
Donner les coordonnées de ses points d'inflexions

Correction :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
On a : $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 30x - 5$
Puis $f''(x) = 24x^2 + 6x - 30$ soit alors $f''(x) = 6(4x^2 + x - 5)$
On calcule les racines à l'aide du discriminant. On obtient : $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{5}{4}$
Un second degré est du signe de *a* à l'extérieur des racines. On a donc :
f est concave sur $I = \left[-\frac{5}{4}; 1\right]$ et *f* est convexe sur $\left]-\infty: -\frac{5}{4}\right[$ et $]1; +\infty[$
On a deux points d'inflexion $I(1;\ -7)$ et $J(-\frac{5}{4};\ -\frac{545}{128})$

Exercice 2 : / 8 pts



On donne ci-dessus la représentation graphique d'une ***fonction f '***, définie sur $[0; +\infty[$.
On donne de plus les coordonnées des points $A(0{,}4; 3{,}84)$ et $B(1{,}6; -3{,}84)$

1) Construire le tableau de variation de f .
2) Construire le tableau de variation de f'.
3) Combien la courbe de f' a-t-elle de point d'inflexion ?
4) Quelle est la valeur de $f''(0{,}4)$?
5) Résoudre graphiquement l'inéquation $f''(x) < 0$.
6) Donner la convexité de f
7) Donner un intervalle sur lequel f' est convexe.
8) Combien la courbe de f a-t-elle de point d'inflexion ?

Correction :

1) On a la courbe de *f'*. On en prend donc le signe afin d'obtenir les variations de *f*. On ne peut pas compléter les images car on n'a aucune information sur *f*.

x	0		1		2		$+\infty$
f		↗		↘		↗	

2) On a la courbe de *f'*. On construit donc le tableau de variation de *f'* par lecture graphique.

x	0		0,4		1,6		$+\infty$
f'	0	↗	3,84	↘	-3,84	↗	

3) La courbe de *f'* semble posséder un seul point d'inflexion, d'abscisse 1.
4) $f''(0{,}4) = 0$ car la tangente à la courbe de f' est horizontale en 0,4.
5) $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f'\text{décroissante}$. Donc $S = [0{,}4; 1{,}6]$
6) A l'aide des variations de *f'*, on a que *f* est concave sur $[0{,}4; 1{,}6]$ et convexe sur $[0; 0{,}4] \cup [1{,}6; +\infty[$
7) *f'* est convexe sur $[1; +\infty[$ ou sur tout intervalle inclus dans celui-ci.
8) La courbe de *f* possède deux points d'inflexion en 0,4 et 1,6.

Exercice 3: / 7 pts

Lors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus, en unités, d'une population propageant celle-ci *x* jours après son commencement peut être modélisé par la fonction *f*, définie sur [0 ; 50] par $f(x) = 100 + x^4e^{-0,1x}$

1) Donner une valeur approchée de $f(2)$. Traduire par une phrase le résultat.
2) Montrer que $f'(x) = x^3(4 - 0{,}1x)e^{-0,1x}$
3) Construire le tableau complet des variations de f sur [0 ; 50]
4) Donner la fenêtre graphique adaptée pour visualiser f sur votre calculatrice.
5) Combien de jours faut-il attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue ?
6) Un logiciel de calcul formel (en annexe) donne $f''(x) = \frac{e^{-0,1x}}{100}x^2(x - 60)(x - 20)$ Étudier alors la convexité de f.
7) Combien de jours faut-il attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur ralentisse ?

Annexe :

Calcul formel

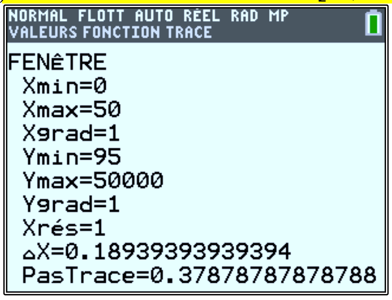
1	Dérivée[100+x^4*exp(-0.1x),x] → $4\,x^3\,e^{-\frac{1}{10}x} - \frac{1}{10}\,x^4\,e^{-\frac{1}{10}x}$
2	Dérivée[4x³ e^((-1) / 10 x) - 1 / 10 x⁴ e^((-1) / 10 x), x] → $12\,x^2\,e^{-\frac{1}{10}x} - \frac{4}{5}\,x^3\,e^{-\frac{1}{10}x} + \frac{1}{100}\,x^4\,e^{-\frac{1}{10}x}$
3	FactoriseCI[12x² e^((-1) / 10 x) - 4 / 5 x³ e^((-1) / 10 x) + 1 / 100 x⁴ e^((-1) / 10 x), x] → $e^{-\frac{1}{10}x}\,x^2\,(x-60)\,\frac{x-20}{100}$

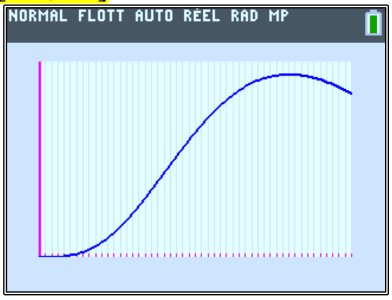
Correction :

1) On calculer $f(2) = 100 + 16e^{-0,2}$ soit donc $f(2) \approx 113$
2) *f* est un produit. On dérive $f'(x) = 4x^3e^{-0,1x} - 0{,}1x^4e^{-0,1x}$

soit en factorisant l'expression : $f'(x) = x^3(4 - 0{,}1x)e^{-0{,}1x}$

3) Les variations de *f* dépendent du signe de $(4 - 0{,}1x)$; Le nombre qui annule est 40.
f est donc croissante sur [0 ; 40] et décroissante sur [40 ; 50]

4) 

avec comme courbe 

5) Il faut donc attendre 40 jours avant que le nombre diminue.

6) Avec l'expression de la dérivée seconde, on peut étudier le signe.
f est donc convexe entre [0 ; 20] puis concave entre [20 ; 50]

7) La croissance du nombre d'individus ralentit au bout de 20 jours. Il s'agit de la vitesse.