



Correction évaluation sur PGCD et le théorème de Bézout

NOM : PRENOM : SUJET A

Exercice 1 : / 3 pts

- 1) On donne les entiers 1530 et 795. Ces nombres sont-ils premiers entre eux ?
- 2) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le $PGCD(1530; 795)$
- 3) Donner alors la fraction irréductible égale à $\frac{1530}{795}$

Correction :

- 1) Ces nombres ne sont pas premiers entre eux car ils sont dans la table de 5...
- 2) On utilise l'algorithme d'Euclide.

$$1530 = 11 \times 795 + 735$$

$$795 = 1 \times 735 + 60$$

$$735 = 12 \times 60 + 15$$

$$60 = 4 \times 15 + 0$$

Ainsi, $PGCD(1530; 795) = 15$

- 3) On simplifie alors $\frac{1530}{795} = \frac{15 \times 102}{15 \times 53}$. On a donc $\frac{1530}{795} = \frac{102}{53}$

Exercice 2 : / 3 pts

On donne l'équation (E): $1274u - 275v = 1$.

Déterminer une solution particulière de l'équation (E) par la méthode de votre choix.

Correction :

On utilise l'algorithme d'Euclide afin de déterminer le $PGCD(1274; 275)$

$$1274 = 4 \times 275 + 174$$

$$275 = 1 \times 174 + 101$$

$$174 = 1 \times 101 + 73$$

$$101 = 1 \times 73 + 28$$

$$73 = 2 \times 28 + 17$$

$$28 = 1 \times 17 + 11$$

$$17 = 1 \times 11 + 6$$

$$11 = 1 \times 6 + 5$$

$$6 = 1 \times 5 + 1$$

Ainsi, $PGCD(1274; 275) = 1$

On remonte l'algorithme d'Euclide.

$$1 = 6 - 1 \times 5$$

$$1 = 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) \text{ soit } 1 = 2 \times 6 - 1 \times 11$$

$$1 = 2 \times (17 - 1 \times 11) - 1 \times 11 \text{ soit } 1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$$

$$1 = 2 \times 17 - 3 \times (28 - 1 \times 17) \text{ soit } 1 = 5 \times 17 - 3 \times 28$$

$$1 = 5 \times (73 - 2 \times 28) - 3 \times 28 \text{ soit } 1 = 5 \times 73 - 13 \times 28$$

$$1 = 5 \times 73 - 13 \times (101 - 1 \times 73) \text{ soit } 1 = 18 \times 73 - 13 \times 101$$

$$1 = 18 \times 73 - 13 \times 101$$

On continue à remonter et on obtient finalement

$$(E): 1274 \times 49 - 275 \times 227 = 1. \text{ Ainsi } (u; v) = (49; 227)$$

Exercice 3 : / 1 pts

On donne l'équation (E): $39u + 42v = 2$

Résoudre cette équation dans \mathbb{Z}^2



Correction :

Puisque $PGCD(39; 42) = 3$, 39 et 42 ne sont pas premiers entre eux.

Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, (E) n'a pas de solution.

Exercice 4 :

/ 3 pts

Déterminer les entiers naturels n inférieurs à 450 tels que $PGCD(n; 270) = 45$

Correction :

Puisque $PGCD(n; 270) = 45$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 45m$. On a donc :

$$PGCD(n; 270) = 45 \Leftrightarrow PGCD(45m; 270) = 45 \Leftrightarrow PGCD(m; 6) = 1$$

On cherche donc tous les entiers naturels inférieurs à 10 et premiers avec 6.

$$S = \{1; 5; 7\} \text{ soit finalement } S = \{45; 225; 315\}$$

Exercice 5 :

/ 4 pts

Déterminer tous les couples $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5x + 13y = 3$

Correction :

Ici, on trouve aisément $5 \times 8 + 13 \times (-3) = 1$; On a donc $(u; v) = (8; -3)$.

En multipliant par 3, on obtient une solution particulière de (E) : $(x_0; y_0) = (24; -9)$

$$\text{On a donc } \begin{cases} 5x + 13y = 3 \\ 5x_0 + 13y_0 = 3 \end{cases}. \text{ Soit par soustraction } 5(x - x_0) = 13(y_0 - y)$$

En remplaçant, on a alors : $5(x - 24) = 13(-9 - y)$

Puisque 5 et 13 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(-9 - y)$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tels que $-9 - y = 5k \Leftrightarrow y = -9 - 5k$.

En injectant dans l'équation, on obtient, avec le même $k \in \mathbb{Z}$, $5(x - 24) = 5 \times 13k$

Ainsi, on obtient $x = 24 + 13k$.

Réciproquement, on vérifie que $(x; y) = (24 + 13k; -9 - 5k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).

On remplace dans (E) : $5(24 + 13k) + 13(-9 - 5k) = 120 + 65k - 117 - 65k = 3$

Ainsi, $S = \{(24 + 13k; -9 - 5k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 6 :

/ 4 pts

Déterminer tous les couples $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x < y \\ x + y = 600 \\ PGCD(x; y) = 50 \end{cases}$$

Correction :

Puisque $PGCD(x; y) = 50$, il existe des entiers naturels premiers entre eux, notés x' et y' tels que $x = 50x'$ et $y = 50y'$.

On a alors $x + y = 600 \Leftrightarrow 50x' + 50y' = 600 \Leftrightarrow x' + y' = 12$

On peut chercher à la main les couples d'entiers naturels, premiers entre eux qui conviennent avec la condition $x' < y'$.

Seuls (0; 12); (1; 11) et (5; 7). Mais (0; 12) ne convient pas. En multipliant par 50, on obtient (50; 550) et (250; 350)

On vérifie que leur somme fait bien 600.

$$S = \{(50; 550); (250; 350)\}$$

Exercice 7 :

/ 2 pts

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer que $PGCD(n^2 - 1; 3(n + 1))$ vaut 3($n + 1$) si $n \equiv 1[3]$ et $n + 1$ sinon.

Correction :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$$



Ainsi, $\text{PGCD}(n^2 - 1; 3(n + 1)) = \text{PGCD}((n + 1)(n - 1); 3(n + 1))$

$$\text{PGCD}(n^2 - 1; 3(n + 1)) = (n + 1)\text{PGCD}((n - 1); 3)$$

- Soit $3/(n - 1) \Leftrightarrow n - 1 \equiv 0[3] \Leftrightarrow n \equiv 1[3]$

On a ainsi $\text{PGCD}(n^2 - 1; 3(n + 1)) = (n + 1) \times 3$

- Soit 3 et $n - 1$ sont premiers entre eux et on a $\text{PGCD}(n^2 - 1; 3(n + 1)) = (n + 1)$