Évaluation sur les complexes

NOM :………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 4 pts

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

- $z = 5(3-4i) + i(2i-3)$
- $z = \frac{1}{3+2i}$
- $z = (2+i)^3$
- $z = \frac{6+4i}{-1-4i}$

Correction :

- $z = 5(3-4i) + i(2i-3)$
- $z = 13 - 23i$
- $z = \frac{1}{3+2i}$
- $z = \frac{3-2i}{13}$
- $z = (2+i)^3$
- $z = (2+i) \times (3+4i)$
- $z = 2 + 11i$
- $z = \frac{6+4i}{-1-4i}$
- $z = \frac{(6+4i)(-1+4i)}{17}$
- $z = \frac{-22+20i}{17}$

Exercice 2 : / 5 pts

Donner le conjugué des complexes suivants sous forme algébrique.

- $z = \frac{1}{5-4i}$
- $z = \frac{1-8i}{3i+7}$
- $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$
- $z = 5i(3i+2)$

Correction :

- $z = \frac{1}{5-4i}$
- $\bar{z} = \frac{1}{5+4i}$
- $\bar{z} = \frac{5-4i}{41}$
- $\bar{z} = \frac{1+8i}{7-3i}$
- $\bar{z} = \frac{-17+59i}{58}$
- $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$
- $\bar{z} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$
- $\bar{z} = i$
- $z = 5i(3i+2)$
- $\bar{z} = -5i(2-3i)$
- $\bar{z} = -15 - 10i$

Exercice 3 : / 5 pts

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.

- $3z - 2i + 4 = i - 2z$
- $3(z+i) - 2z = i + z$
- $z - 3i\bar{z} = -5 - i$
- $\frac{z+1}{z-2} = 3i$

Correction :

- $3z - 2i + 4 = i - 2z$
- $5z = -4 + 3i$
- $z = \frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i$
- Soit $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-4}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$
- $3(z+i) - 2z = i + z$
- $3i = i$
- $S_{\mathbb{C}} = \emptyset$
- $z - 3i\bar{z} = -5 - i$
- On pose $z = x + iy$
- $(x+iy) - 3i(x-iy) = -5 - i$
- $x + 5 - 3y + i(y - 3x + 1) = 0$
- $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$
- Soit $z = 1 + 2i$
- $S_{\mathbb{C}} = \{1 + 2i\}$
- $\frac{z+1}{z-2} = 3i$
- $\frac{z(1-3i)+1+6i}{z-2} = 0$
- $z = \frac{1+6i}{-1+3i}$ et $z \neq 2$
- $z = \frac{17}{10} + \frac{-9}{10}i$

- $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{17}{10} + \frac{-9}{10}i\right\}$

Exercice 4 : / 4 pts

On définit une fonction f de la variable complexe z.

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{2i\}, f(z) = \frac{2z}{z - 2i}$$

1) Calculer l'image de 2 par f.
2) Calculer l'image de $1 + i$ par f.
3) On appelle invariant de f tout nombre complexe qui est égal à son image. Montrer alors que f possède deux invariants.

Correction :

1) On évalue l'image $f(2) = \frac{2\times 2}{2-2i}$ soit $f(2) = \frac{2}{1-i}$ soit $f(2) = 1 + i$
2) On évalue l'image $f(1+i) = \frac{2\times(1+i)}{1+i-2i}$ soit $f(1+i) = \frac{2(1+i)}{1-i}$ soit $f(1+i) = 2i$
3) Puisqu'on cherche un invariant, on doit résoudre , $f(z) = z$
   Soit ici $\frac{2z}{z-2i} = z \Leftrightarrow \frac{-z^2+z(2+2i)}{z-2i} = 0$
   On a donc $z(-z + 2 + 2i) = 0 \; et \; z \neq 2i$
   Soit $z = 0$ ou $z = 2 + 2i$. f possède donc bien deux invariants.

Exercice 5 : / 2 pts

Donner la forme algébrique des quatre nombres complexes définis dans la console python par les commandes suivantes.

```
z1 = complex(2,3)
z2 = complex(5,7)
z3 = z1 + z2
z4 = z1*z2
```

Correction :

```
def complexe():
    z1 = complex(2,3)
    z2 = complex(5,7)
    z3 = z1+z2
    z4 = z1*z2
    print("z1=",z1)
    print("z2=",z2)
    print("z3=",z3)
    print("z4=",z4)
```

```
complexe()
z1= (2+3j)
z2= (5+7j)
z3= (7+10j)
z4= (-11+29j)
```