Correction Évaluation sur divisibilité

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………….. SUJET A

Exercice 1 : / 2 pts

Déterminer tous les diviseurs communs à 12 et 50 dans $\mathbb{Z}$.

Correction :

$D(12) = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$
$D(50) = \{-50; -25; -10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10; 25; 50\}$
Les diviseurs communs seront donc $\{-2; -1; 1; 2\}$

Exercice 2 : / 5 pts

Démontrer que pour tout entier naturel n, 9 divise $4^n + 15n - 1$

Correction :

On note $\forall n \in \mathbb{N}, P_n : \exists k \in \mathbb{Z}, 4^n + 15n - 1 = 9k$.

(1) Initialisation :

Lorsque $n = 0$, alors $4^n + 15n - 1 = 0 \times 9$ donc P_0 ***est vraie, la propriété est initialisée***.

(2) Hérédité :

Je suppose qu'il existe un entier n tel que , P_n soit vraie. Montrons alors que la propriété est vraie au rang $n+1$, $P_{n+1} : \exists k' \in \mathbb{Z}, 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9k$ (?)
A l'aide de , P_n, je peux isoler $4^n = 9k + 1 - 15n$
On injecte l'hypothèse de récurrence dans l'expression :
$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 15(n+1) - 1$
$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \times (9k + 1 - 15n) + 15(n+1) - 1$
$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9(4k) + 4 - 60n + 15n + 15 - 1$
$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9(4k + 2 - 5n)$
On pose alors $k' = 4k + 2$
D'où P_{n+1} ***est vraie, la propriété est héréditaire***.

(3) Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, P_n : \exists k \in \mathbb{Z}, 4^n + 15n - 1 = 9k$.

Exercice 3 : / 3 pts

Le reste de la division euclidienne de a par 7 est 4.
Le reste de la division euclidienne de b par 7 est 6.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 7.
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a - b$ par 7.
3) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a^3 + b$ par 7.

Correction :

On traduit le reste de la division euclidienne de a par 7 est 4 par $a \equiv 4\ [7]$
On traduit le reste de la division euclidienne de b par 7 est 4 par $b \equiv 6\ [7]$

1) On a alors $a + b \equiv 10\ [7]$ soit alors $a + b \equiv 3\ [7]$
2) On a alors $a - b \equiv -2\ [7]$ soit alors $a - b \equiv 5\ [7]$
3) On évalue $a^2 \equiv 16\ [7]$ soit $a^2 \equiv 2\ [7]$ et donc $a^3 \equiv 8\ [7]$ soit $a^3 \equiv 1\ [7]$
   Ainsi $a^3 + b \equiv 7\ [7]$ soit $a^3 + b \equiv 0\ [7]$

Exercice 4 : / 3 pts

1) Compléter le tableau de congruence modulo 3 ci-dessous.

$n \equiv\ \dots\ [3]$	0	1	2
$n^2 \equiv\ \dots\ [3]$	0	1	1
$2n \equiv\ \dots\ [3]$	0	2	1
$n^2 + 2n \equiv\ \dots\ [3]$	0	0	2

2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $n^2 + 2n$ est divisible par 3.

Correction :

On utilise le tableau ci-dessus.
$n^2 + 2n$ est divisible par 3 lorsque n est de la forme $n = 3p$ ou $n = 3p + 1$

Exercice 5 : / 2 pts

Soit n un entier naturel tel que $n > 4$.
Effectuer la division euclidienne de $n^3 - 5n^2 + 7n - 1$ par $n - 2$.
Quel est le reste ?

Correction :

On peut présenter comme vu en classe, sous la forme d'une division.

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 5n^2 + 7n - 1 & \ \ n - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-(n^3 - 2n^2)}\qquad\qquad & n^2 - 3n + 1 \\ -3n^2 + 7n\quad\ \ & \\ \underline{-(-3n^2 + 6n)}\quad\ \ & \\ n - 1 & \\ \underline{-(n - 2)} & \\ +1 & \end{array}$$

Avec $n > 4$, alors $0 \leq r < b$
On a donc : $n^3 - 5n^2 + 7n - 1 = (n - 2)(n^2 - 3n + 1) + 1$

Exercice 6 : / 3 pts

1) Conjecturer les restes de la division euclidienne de 5^n par 6 pour les premières valeurs de n.
2) En déduire le reste de la division euclidienne de 3125^{221} par 6

Correction :

1) On évalue pour les premières valeurs
$5^0 \equiv 1\ [6]$ puis $5^1 \equiv 5\ [6]$ puis $5^2 \equiv 1\ [6]$ puis $5^3 \equiv 125\ [6]$ soit $5^3 \equiv 5\ [6]$
De la même manière $5^4 \equiv 1\ [6]$ puis $5^5 \equiv 5\ [6]$ soit $5^5 \equiv -1\ [6]$
2) $3125^{221} \equiv (-1)^{221}\ [6]$ soit alors $3125^{221} \equiv (-1)^{2\times 110+1}\ [6]$
Et donc $3125^{221} \equiv 5\ [6]$; Le reste vaut donc 5.

Exercice 7 : / 2 pts

En raisonnant par l'absurde, montrer que quel que soit l'entier relatif n, $2n + 5$ n'est jamais divisible par 2.

Correction :

On suppose que $2n + 5$ est divisible par 2, ce qui signifie qu'il existe un entier relatif k tel que
$2n + 5 = 2k \Leftrightarrow 2(n - k) = 5$
Ceci signifie donc que 5 est un nombre pair. Ce qui est absurde.