Correction Évaluation sur les complexes et la géométrie

Dans toute l'évaluation, on se donne un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan ***direct***.

Exercice 1 : / 2 pts

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

- $z = 5(2-7i) + i(3i-5)$
- $z = \frac{5-3i}{5+3i}$

Correction :

- $z = 5(2-7i) + i(3i-5)$
- $z = 10 - 35i - 5i - 3$
- $z = 7 - 40i$

- $z = \frac{5-3i}{5+3i}$
- $z = \frac{(5-3i)^2}{34}$
- $z = \frac{8}{17} - \frac{15}{17}i$

Exercice 2 : / 2 pts

On donne 4 points du plan d'affixe respective $z_A = -1+3i$, $z_B = 4+5i$, $z_C = 2-i$ et $z_D = 3+i$. Après avoir écrit la formule, déterminer par le calcul :

- L'affixe de I, milieu de$[AB]$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- La longueur de CD
- L'affixe du vecteur $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}$

Correction :

On applique les formules.

- $z_I = \frac{3}{2} + 4i$
- $z_{\overrightarrow{AB}} = 5 + 2i$
- $CD = |z_D - z_C| = \sqrt{5}$
- $Z = 3z_{\overrightarrow{AB}} - 2z_{\overrightarrow{CD}} = 3(5+2i) - 2(1+2i)$ soit $Z = 13 + 2i$

Exercice 3 : / 2 pts

Calculer le module des complexes ci-dessous.

- $z_1 = -5 + 12i$
- $z_2 = \frac{1-i}{1+i}$
- $z_1 = (8-6i)^2$

Correction :

- $|z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$
- $|z| = 13$

- $|z| = \frac{|1-i|}{|1+i|}$
- $|z| = 1$

- $|z| = |8-6i|^2$
- $|z| = 100$

Exercice 4 : / 2 pts

1) Donner la définition de $\mathbb{U}$.
2) Parmi les complexes ci-dessous, lequel appartient à $\mathbb{U}$

- $z_1 = 1 + i$
- $z_2 = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$
- $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$

Correction :

L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté : $\mathbb{U}$

On a : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. $|z_2| = \left|\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2}$ *soit* $|z_2| = 1$

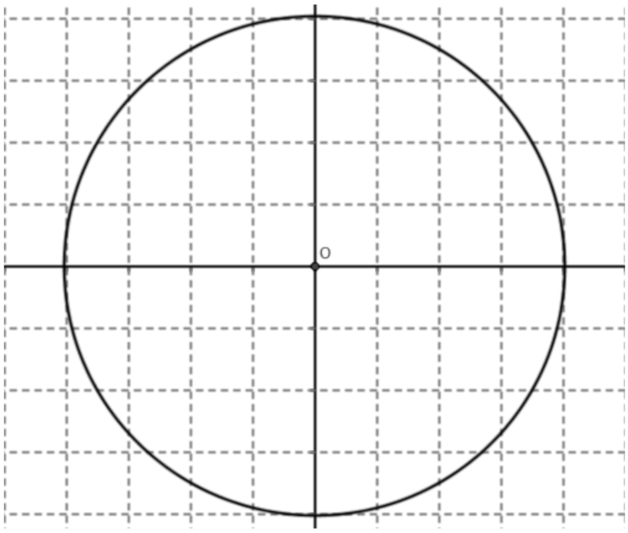
Exercice 5 : / 3 pts

On rappelle que $arg(z)$ signifie argument d'un nombre complexe. Compléter ci-dessous.

- $arg(-i) = \frac{-\pi}{2}\ (2\pi)$
- $arg(\ldots i \ldots) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $arg(13) = 0.(2\pi)$
- $arg(-\sqrt{5}) = \pi.(2\pi)$
- $arg(1-i) = \frac{-\pi}{4}\ (2\pi)$
- $arg(\bar{j}) = \frac{-2\pi}{3}\ (2\pi)$

Exercice 6 : / 4 pts

Donner les valeurs exactes ci-dessous en vous aidant si nécessaire du cercle ci-contre.



- $sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $sin\left(\frac{-5\pi}{2}\right) = -1$
- $cos(\frac{11\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $sin\left(\frac{-21\pi}{6}\right) = +1$
- $cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- $sin\left(\frac{10\pi}{2}\right) = 0$
- $cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
- $cos(\frac{-7\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Exercice 7 : / 2 pts

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

- $z_1 = -1 + i$
- $z_2 = -\sqrt{3} + i$

Correction :

Pour obtenir la forme trigonométrique, on calcule le module et on factorise. On recherche alors un argument dont on connait le cosinus et le sinus.

- $|z_1| = \sqrt{2}$
- $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

- $|z_2| = 2$
- $z_2 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
- $z_1 = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 8 : / 3 pts

Donner un argument et le module des nombres complexes suivants.

- $z_1 = 3(cos(x) - isin(x))$
- $z_2 = -2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $z_3 = 13\left(sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - icos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Correction :

On doit transformer l'écriture afin d'obtenir module et argument.

- $z_1 = 3(cos(x) - isin(x))$
- $z_1 = 3(cos(-x) + isin(-x))$
- $|z_1| = 3$ et $arg(z_1) = -x\ (2\pi)$
- $z_2 = -2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $z_2 = 2\left(-cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $z_2 = 2\left(cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $|z_2| = 2$ et $arg(z_2) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$
- $z_3 = 13\left(sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - icos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$
- $z_3 = 13\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right)$
- $z_3 = 13\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
- $z_3 = 13\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$
- $|z_3| = 13$ et $arg(z_3) = \frac{-\pi}{3}\ (2\pi)$