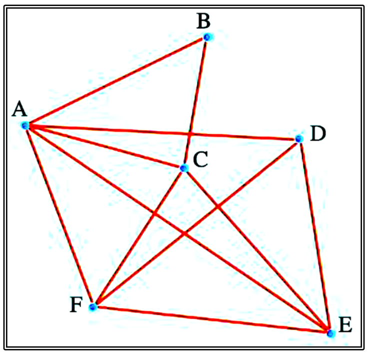
Correction Évaluation sur les graphes orientés

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 4 pts

On donne le graphe ci-contre.

1) Quel est l'ordre de ce graphe.
2) Est-il simple ?
3) Est-il complet ?
4) Est-il connexe ?
5) Combien possède-t-il d'arêtes ?
6) Existe-t-il une chaine Eulérienne ?
7) Existe-t-il un cycle Eulérien ?
8) Déterminer un sous-graphe complet d'ordre 4. Combien en existe-t-il ?

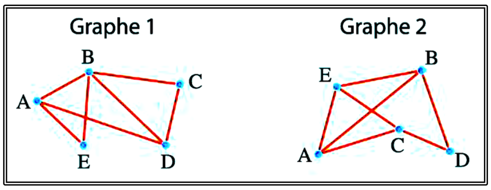


Correction :

1) L'ordre du graphe est de 6 car il possède 6 sommets.
2) Le graphe est simple car il ne contient pas de boucle et une seule arête relie deux sommets distincts.
3) Le graphe n'est pas complet car les sommets B et D ne sont pas reliés.
4) Le graphe est connexe car on peut relier tous les sommets.
5) Il possède au total 11 arêtes.
6) A est de degré 5, D est de degré 3. Il existe donc une chaine Eulérienne.
7) Il n'y a pas de cycle Eulérien puisque nous avons 2 sommets de degré impair.
8) Le graphe ADEF est un sous graphe complet d'ordre 4, comme ACEF.

Exercice 2 : / 3 pts

On donne les deux graphes ci-dessous.



Peut-on dessiner chacun de ces deux graphes sans lever le crayon en passant une fois et une seule sur chaque arête ?

Correction :

Pour le graphe 1 :

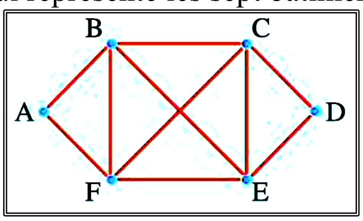
On cherche donc l'existence d'une chaîne Eulérienne, Il y a deux sommets de degré impair. Ce sont A et D. Il existe donc une chaine Eulérienne. A-B-E-A-D-C-B-D par exemple

Pour le graphe 2 :

Il y a 3 sommets (A, B et C) avec un degré impair. Il ne peut donc pas y avoir de chaines Eulérienne.

Exercice 3 : / 4 pts

On donne le graphe ci-dessous qui représente les sept bâtiments d'une entreprise.



Un agent de sécurité effectue des rondes de surveillance en partant de l'entrepôt A.
Existe-t-il un chemin de ronde pour l'agent de sécurité qui lui permette de passer par tous les chemins une seule fois en revenant en A ?

Correction :

On cherche donc l'existence d'un cycle Eulérien. Le graphe est connexe et n'a que des sommets de degré pair. Il existe donc un cycle Eulérien. L'agent de sécurité peut donc effectuer une ronde en partant de A et en passant par tous les chemins de l'entreprise. Par exemple : A-B-F-C-E-B-C-D-E-F-A ou A-F-C-E-B-C-D-E-F-B-A

Exercice 4 : / 4 pts

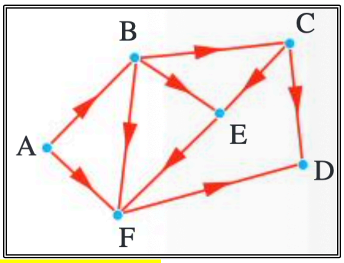
Un graphe de sommets ABCDEF admet la matrice d'adjacence M.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Ce graphe est-il simple ?
2) Est-il orienté ?
3) Quel est l'ordre du graphe ?
4) Ce graphe est-il complet ?
5) Tracer proprement ce graphe.
6) Le graphe admet-il une chaine Eulérienne ?

Correction :

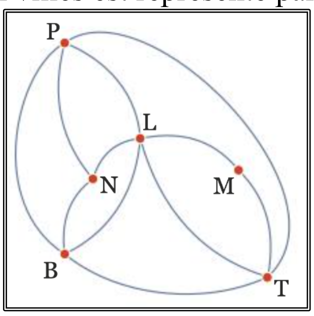
1) Ce graphe est simple car la diagonale ne comporte que des zéros.
2) Ce graphe est orienté car la matrice n'est pas symétrique.
3) Le graphe est d'ordre 6.
4) Il n'est pas complet car A et D ne sont pas reliés.
5) On trace avec les informations.



6) Il ne peut pas y avoir de chaîne Eulérienne puisque D a un degré entrant de 2 mais un degré sortant nul.

Exercices 5 :

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises. Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre les six grandes villes françaises : Paris, Bordeaux, Nantes, Toulouse, Lyon et Marseille.
Le réseau autoroutier reliant ces six villes est représenté par le graphe ci-dessous.



Les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières.

1) Ce graphe est-il complet ?
2) Quel est son ordre ?

3) Donner la matrice d'adjacence de ce graphe en rangeant les sommets par ordre alphabétique.
4) Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard afin d'assister à une course automobile. Le journaliste décide de s'arrêter chaque jour dans une ville différente. Déterminer le nombre de trajet possible pour lui respectant ces conditions.

Correction :

1) Ce graphe n'est pas complet. Par exemple, N et T ne sont pas reliés.
2) Ce graphe est d'ordre 6.
3) On construit la matrice d'adjacence avec pour ordre : BLMNPT. Elle est symétrique puisque le graphe n'est pas orienté.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) On évalue donc la puissance troisième de G

$$G^3 = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

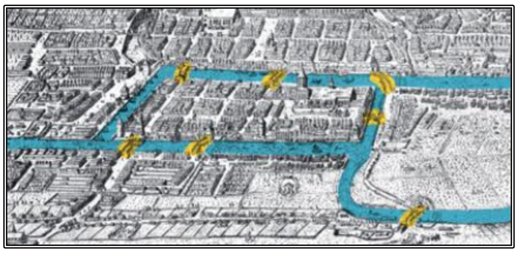
On cherche donc à relier Paris à Marseille en trois jours.
Il existe 5 possibilités en regard de la matrice d'adjacence.

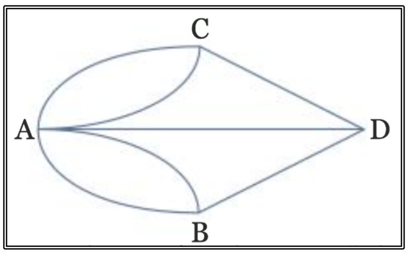
Exercice 6 : / 2 pts

Expliquer en détaillant le problème des ponts de Königsberg.

Correction :

Lors de ses nombreux voyages à travers l'Europe, Léonhard Euler arrive à Königsberg (aujourd'hui appelée Kaliningrad en Russie). Il est confronté à un problème posé par les habitants de la ville : est-il possible de se promener dans la ville en passant par les sept ponts de la ville qui enjambent la Prégolia une et une seule fois.





La ville est partagée en 4 zones reliées par des ponts. A représente l'île, elle est reliée par 7 ponts qui correspondent aux 7 arrêtes. Euler montra que la promenade n'était pas possible, qu'on exige ou non de revenir au point de départ.
Avec l'exemple initial, on a :

Sommets	A	B	C	D
Degré	5	3	3	3

Le graphe a donc 4 sommets de degré impair. Il n'existe pas de chaîne Eulérienne et le problème posé par les habitants de Königsberg n'a pas de solution.