Évaluation sur utilisation des matrices

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

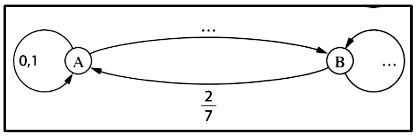
Exercice 1 : *Exercice de cours* / 7 pts

On donne la suite de matrices colonnes (U_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = A \times U_n + B$.

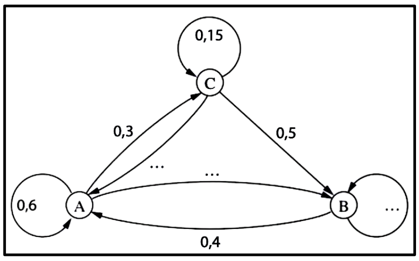
On a $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'état stable noté U
2. Montrer que la suite définie par $V_n = U_n - U$ est une suite géométrique.
3. Donner l'expression de V_n en fonction de n.
4. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ -n0{,}5^n & 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Donner alors l'expression de U_n
5. Déterminer la limite de (U_n).

Exercice 2 : / 4 pts

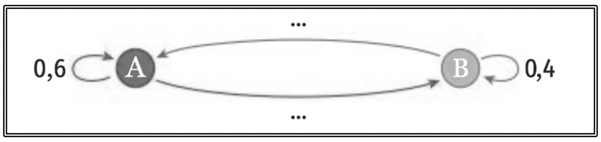


On donne les deux graphes probabilistes ci-contre.
Compléter ces graphes et donner sur votre feuille la matrice de transition.



Exercice 3 : / 5 pts

On considère le graphe probabiliste ci-dessous.



1) Compléter le graphe ci-dessus.
2) Écrire sa matrice de transition.
3) Montrer que $\pi = (0{,}6 \quad 0{,}4)$ est une distribution invariante de la chaîne de Markov associée en résolvant un système.

Exercice 4 : / 4 pts

Le graphe probabiliste ci-contre représente une chaîne de Markov.

1) Déterminer la valeur de p par le calcul.
2) En déduire la matrice de transition notée P.
3) Calculer P^2 puis P^3.
4) En déduire la distribution de probabilités après 3 étapes de cette chaine de Markov pour une distribution initiale $\pi_0 = (0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}4)$