Correction évaluation sur fonctions de référence

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 3 pts

Soit la fonction du second degré $f(x) = x^2 + 10x - 7$ définie sur $I =]-5; +\infty[$
Montrer qu'elle est croissante sur $I =]-5; +\infty[$

Correction :

Soient a et b deux nombres de I tels que $-5 < a < b$
On va évaluer la différence $f(b) - f(a) = 2b^2 + 10b - 7 - (a^2 + 10a - 7\,)$
Soit en simplifiant $f(b) - f(a) = b^2 + 10b - (a^2 + 10a\,)$
Soit en simplifiant $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 + 10b - 10a$
On factorise alors l'expression : $f(b) - f(a) = [(b + a)(b - a) + 10(b - a)]$
On a alors $f(b) - f(a) = (b - a)[b + a + 10]$
Chacun des 2 facteurs garde un signe constant positif sur $I =]-5\,;\infty]$
On a donc $f(a) < f(b)$ et f est croissante sur $I =]-5\,;\infty]$

Exercice 2 : / 3 pts

Soit la fonction homographique $f(x) = \frac{13}{x-2} + 66$ définie sur $I =]-\infty\,;2[$. Montrer qu'elle est décroissante sur $I =]-\infty\,;2[$

Correction :

Soient a et b deux nombres de I tels que $a < b < 3$
On va évaluer la différence $f(b) - f(a) = \frac{13}{b-2} + 66 - \left(\frac{13}{a-2} + 66\right)$
Soit en simplifiant $f(b) - f(a) = \frac{13}{b-2} - \frac{13}{a-2}$
On réduit au même dénominateur $f(b) - f(a) = \frac{13(a-b)}{(b-2)(a-2)}$
Chacun des 3 facteurs garde un signe constant négatif sur $I =]-\infty\,;2[$
On a donc $f(b) - f(a) < 0$ et donc $f(b) < f(a)$
Ainsi f est décroissante sur $I =]-\infty\,;2[$

Exercice 3 : / 3 pts

1) Construire le tableau de variations de la fonction inverse
2) Donner un encadrement de x lorsque :

- $1 < \frac{1}{x} < 3$
- $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{7}{6}$
- $-4 < \frac{1}{x} < -2$
- $-2 < \frac{1}{x} < 0$

Correction :

1) On peut donc construire le tableau de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	‖	$\searrow$	

2)

- $1 < \frac{1}{x} < 3$ donc $\frac{1}{3} < x < 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty\,[$
- $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{7}{6}$ donc $\frac{6}{7} < x < \frac{3}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty\,[$
- $-4 < \frac{1}{x} < -2$ donc $\frac{-1}{2} < x < \frac{-1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0\,[$
- $-2 < \frac{1}{x} < 0$ donc $x < \frac{-1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0\,[$

Exercice 4 : / 3 pts

1) Construire le tableau de variations de la fonction carrée
2) Comparer les nombres suivants

- $1{,}5^2 \ldots\ldots 6^2$
- $(-1{,}25)^2 \ldots\ldots 2{,}5^2$
- $(-0{,}7)^2 \ldots\ldots (-0{,}082)^2$
- $(\pi - 1)^2 \ldots\ldots 4$

Correction :

1) On peut donc construire le tableau de variation de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$

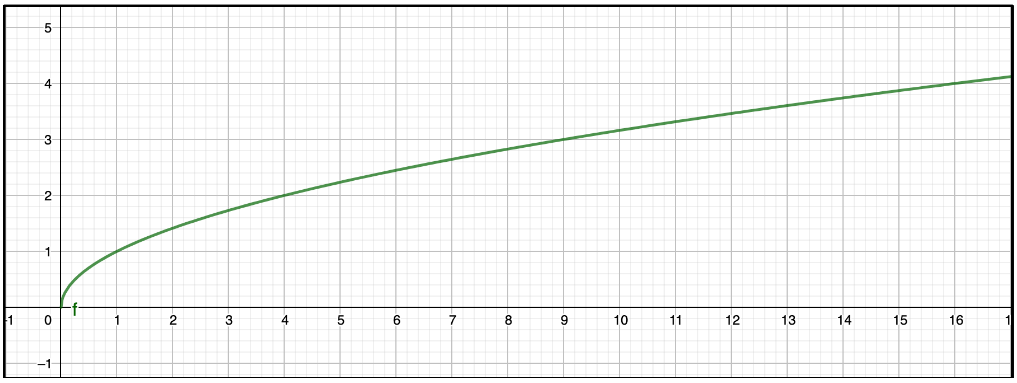
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2) Comparer les nombres suivants

- $1{,}5^2 < 6^2$
- $(-1{,}25)^2 < 2{,}5^2$
- $(-0{,}7)^2 > (-0{,}082)^2$
- $(\pi - 1)^2 > 4$

Exercice 5 : / 3 pts

1) Construire ci-dessous la courbe représentative de la fonction racine carrée.
2) Résoudre graphiquement l'inéquation $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$ pour x positif.



Correction :

1) Pour résoudre $2 \leq \sqrt{x} \leq 3$, on cherche les antécédents.
   $2 \leq \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 9$

Exercice 6 : / 3 pts

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $x^2 = 13$
- $x^2 < 36$
- $x^2 \geq 64$

Correction :

- $x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$ et $x = -\sqrt{13}$ soit $S = \{\sqrt{13}; -\sqrt{13}\}$
- $x^2 < 36 \Leftrightarrow x < 6$ et $x > -6$ soit $S =]-6; 6[$
- $x^2 \geq 64 \Leftrightarrow x \leq -8$ et $x \geq 8$ soit $S =]-\infty; -8] \cup [8; +\infty[$

Exercice 7 : / 2 pts

Comparer les nombres suivants en expliquant les notions utilisées.

- 16 et 4 et 4^3.
- $0{,}001$ et 10^{-2} et $0{,}1$

Correction :

- 16 et 4 et 4^3. On note $16 = 4^2$. $\forall x \in]1; +\infty[, x < x^2 < x^3$. Donc $4 < 4^2 < 4^3$
- $0{,}001$ et 10^{-2} et $0{,}1$ On note $0{,}001 = 0{,}1^3$. $\forall x \in]0; 1[, x^3 < x^2 < x$. $0{,}1^3 < 0{,}1^2 < 0{,}1$