Correction Évaluation sur complexes et trigonométrie

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 3 pts

1) Donner l'expression de $cos(a+b)$ et $sin(a-b)$ pour a et b deux nombres réels
2) Donner la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Correction :

1) Grâce aux formules du cours, on a quelque soit a et b réels :

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\sin(b)$$
$$sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - sin(b)\cos(a)$$

2) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

On a :$cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

On a alors :$cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 2 : / 2 pts

On donne $z = -1 - i$.
Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z.

Correction :

On évalue $|z| = \sqrt{2}$ soit en factorisant $z = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Je cherche θ tel que $\begin{cases} cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$. On est situé dans le 3ème quadrant.

On a $z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$ soit aussi $z = \sqrt{2}e^{\frac{-3i\pi}{4}}$

Exercice 3 : / 2 pts

On donne $z = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - icos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z.

Correction :

Si vous pensez que c'est déjà sous forme trigonométrique, c'est que vous n'avez pas tout compris…

$z = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - icos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$z = sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + icos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$z = cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$

$z = cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ soit donc aussi $z = e^{\frac{-i\pi}{6}}$

Exercice 4 : / 4 pts

Soit $Z = \frac{(1+i)^3}{(-1-i\sqrt{3})^5}$
Donner la forme exponentielle de Z

Correction :

On va traiter séparément le numérateur et le dénominateur :

$z_1 = 1 + i$ soit rapidement $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$z_2 = -1 - i\sqrt{3}$. On met sous forme trigonométrique après avoir remarqué qu'on était situé dans le troisième quadrant : $z_2 = 2e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.

On a alors : $Z = \dfrac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^3}{\left(2e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)^5} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}{32e^{\frac{-10i\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{\frac{3i\pi}{4}+\frac{10i\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{\frac{49i\pi}{12}}$

Au final, on obtient : $Z = \dfrac{\sqrt{2}}{16}e^{\frac{i\pi}{12}}$

Exercice 5 : / 2 pts

A l'aide de la formule de Moivre, retrouver les formules de duplication.

Correction :

Il s'agit d'une question de cours.

Pour $n = 2$, on a $\left(cos(\theta) + isin(\theta)\right)^2 = cos(2\theta) + isin(2\theta)$

En développant l'identité remarquable, on obtient :

$$(cos(\theta))^2 + 2icos(\theta)sin(\theta) - (sin(\theta))^2 = cos(2\theta) + isin(2\theta)$$

Deux complexes sont égaux si leur partie réelle est leur partie imaginaire sont égales.

$\begin{cases} cos(2\theta) = (cos(\theta))^2 - (sin(\theta))^2 \\ sin(2\theta) = 2cos(\theta)sin(\theta) \end{cases}$ On retrouve les formules de duplication.

Exercice 6 : / 2 pts

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $cos\left(\frac{n\pi}{20}\right) + isin\left(\frac{n\pi}{20}\right)$ soit un imaginaire pur.

Correction :

Pour que $cos\left(\frac{n\pi}{20}\right) + isin\left(\frac{n\pi}{20}\right)$ soit un imaginaire pur, il faut que la partie réelle soit nulle.

$$cos\left(\frac{n\pi}{20}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{20} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 10 + 20k, k \in \mathbb{Z}$$

$S = \{10 + 20k, k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 7 : / 2 pts

Soit $z = \sqrt{3} + i$. On note $Z = z^{2019} + \bar{z}^{2019}$

Je pense que $Z = 2^{2020}$. Vrai ou faux ?

Correction :

Je commence par mettre sous forme exponentielle.

$z = \sqrt{3} + i$ devient $z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$

On évalue $z^{2019} = 2^{2019}e^{\frac{2019i\pi}{6}}$. On a $2019 = 12 \times 168 + 3$

Ainsi, $\frac{2019\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}[2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Ainsi, $z^{2019} = 2^{2019}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $\bar{z}^{2019} = 2^{2019}e^{\frac{-i\pi}{2}}$

On a donc $Z = 0$ car on ajoute deux imaginaires purs conjugués.

Exercice 8 : / 3 pts

A l'aide d'une formule d'Euler, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sin^4(x) = \frac{1}{8}(cos(4x) - 4cos(2x) + 3)$$

Correction :

On a : $\forall\theta \in \mathbb{R}, sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (sin(x))^4 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^4$. On peut utiliser le binôme de Newton ou une identité remarquable.

$(sin(x))^4 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}$.

On regroupe alors : $(sin(x))^4 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\right) + 3 - 4\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\right]$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, sin^4(x) = \frac{1}{8}(cos(4x) - 4cos(2x) + 3)$$