Correction évaluation sur PGCD et le théorème de Bézout

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 3 pts

1) On donne les entiers 1530 et 795. Ces nombres sont-ils premiers entre eux ?
2) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le $PGCD(1530; 795)$
3) Donner alors la fraction irréductible égale à $\frac{1530}{795}$

Correction :

1) Ces nombres ne sont pas premiers entre eux car ils sont dans la table de 5…
2) On utilise l'algorithme d'Euclide.
   $1530 = 11 \times 795 + 735$
   $795 = 1 \times 735 + 60$
   $735 = 12 \times 60 + 15$
   $60 = 4 \times 15 + 0$
   Ainsi, $PGCD(1551; 132) = 15$
3) On simplifie alors $\frac{1530}{795} = \frac{15\times102}{15\times53}$. On a donc $\frac{1530}{795} = \frac{102}{53}$

Exercice 2 : / 3 pts

On donne l'équation $(E): 1274u - 275v = 1$.
Déterminer une solution particulière de l'équation (E) par la méthode de votre choix.

Correction :

On utilise l'algorithme d'Euclide afin de déterminer le $PGCD(1274; 275)$

$1274 = 4 \times 275 + 174$
$275 = 1 \times 174 + 101$
$174 = 1 \times 101 + 73$
$101 = 1 \times 73 + 28$
$73 = 2 \times 28 + 17$
$28 = 1 \times 17 + 11$
$17 = 1 \times 11 + 6$
$11 = 1 \times 6 + 5$
$6 = 1 \times 5 + 1$

Ainsi, $PGCD(1274; 275) = 1$

On remonte l'algorithme d'Euclide.

$1 = 6 - 1 \times 5$
$1 = 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6)$ soit $1 = 2 \times 6 - 1 \times 11$
$1 = 2 \times (17 - 1 \times 11) - 1 \times 11$ soit $1 = 2 \times 17 - 3 \times 11$
$1 = 2 \times 17 - 3 \times (28 - 1 \times 17)$ soit $1 = 5 \times 17 - 3 \times 28$
$1 = 5 \times (73 - 2 \times 28) - 3 \times 28$ soit $1 = 5 \times 73 - 13 \times 28$
$1 = 5 \times 73 - 13 \times (101 - 1 \times 73)$ soit $1 = 18 \times 73 - 13 \times 101$
$1 = 18 \times 73 - 13 \times 101$
On continue à remonter et on obtient finalement
$(E): 1274 \times 49 - 275 \times 227 = 1$. Ainsi $(u; v) = (49; 227)$

Exercice 3 : / 1 pts

On donne l'équation $(E): 39u + 42v = 2$
Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}^2$

Correction :

Puisque $PGCD(39; 42) = 3$, 39 et 42 ne sont pas premiers entre eux.
Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, (E) n'a pas de solution.

Exercice 4 : / 3 pts

Déterminer les entiers naturels n inférieurs à 450 tels que $PGCD(n; 270) = 45$

Correction :

Puisque $PGCD(n; 270) = 45$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 45m$. On a donc :
$PGCD(n; 270) = 45 \Leftrightarrow PGCD(45m; 270) = 45 \Leftrightarrow PGCD(m; 6) = 1$
On cherche donc tous les entiers naturels inférieurs à 10 et premiers avec 6.
$S = \{1; 5; 7\}$ soit finalement $S = \{45; 225; 315\}$

Exercice 5 : / 4 pts

Déterminer tous les couples $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $5x + 13y = 3$

Correction :

Ici, on trouve aisément $5 \times 8 + 13 \times (-3) = 1$; On a donc $(u\,; v) = (8\,; -3)$.
En multipliant par 3, on obtient une solution particulière de (E) :$(x_0\,; y_0) = (24\,; -9)$
On a donc $\begin{cases} 5x + 13y = 3 \\ 5x_0 + 13y_0 = 3 \end{cases}$. Soit par soustraction $5(x - x_0) = 13(y_0 - y)$
En remplaçant, on a alors : $5(x - 24) = 13(-9 - y)$
Puisque 5 et 13 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $(-9 - y)$.
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tels que $-9 - y = 5k \Leftrightarrow y = -9 - 5k.$
En injectant dans l'équation, on obtient, avec le même $k \in \mathbb{Z}$, $5(x - 24) = 5 \times 13k$
Ainsi, on obtient $x = 24 + 13k.$

Réciproquement, on vérifie que $(x\,; y) = (24 + 13k\,; -9 - 5k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).
On remplace dans (E) : $5(24 + 13k) + 13(-9 - 5k) = 120 + 65k - 117 - 65k = 3$
Ainsi, $S = \{(24 + 13k\,; -9 - 5k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 6 : / 4 pts

Déterminer tous les couples $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x < y \\ x + y = 600 \\ PGCD(x; y) = 50 \end{cases}$$

Correction :

Puisque $PGCD(x; y) = 50$, il existe des entiers naturels premiers entre eux, notés x' et y' tels que $x = 50x'$ et $y = 50y'$.
On a alors $x + y = 600 \Leftrightarrow 50x' + 50y' = 600 \Leftrightarrow x' + y' = 12$
On peut chercher à la main les couples d'entiers naturels, premiers entre eux qui conviennent avec la condition $x' < y'$.
Seuls $(0; 12)$; $(1; 11)$ et $(5; 7)$. Mais $(0; 12)$ne convient pas. En multipliant par 50, on obtient $(50; 550)$ et $(250; 350)$
On vérifie que leur somme fait bien 600.
$S = \{(50; 550); (250; 350)\}$

Exercice 7 : / 2 pts

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que $PGCD(n^2 - 1; 3(n + 1))$vaut $3(n + 1)$ si $n \equiv 1[3]$ et $n + 1$sinon.

Correction :

$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$

Ainsi, $PGCD\left(n^2-1;3(n+1)\right)=PGCD((n+1)(n-1);3(n+1))$

$PGCD\left(n^2-1;3(n+1)\right)=(n+1)PGCD\left((n-1);3\right)$

- Soit $3/n \Leftrightarrow\ n-1\equiv 0[3] \Leftrightarrow\ n\equiv 1[3]$

  On a ainsi $PGCD\left(n^2-1;3(n+1)\right)=(n+1)\times 3$
- Soit 3 et $n-1$ sont premiers entre eux et on a $PGCD\left(n^2-1;3(n+1)\right)=(n+1)$