Correction Evaluation
sur les suites arithmétiques et géométriques

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : *technique de base* / 3 pts

(u_n) est une suite arithmétique de raison *4* et de premier terme $u_0 = 17$.

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
b) Donner la formule explicite de la suite (u_n)
c) Déterminer l'entier n tel que : $u_n = 253$
d) Calculer S_{38}

Correction :

Je passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, soit 4 ici donc :
$u_0 = 17$, $u_1 = 21$, $u_2 = 25$, $u_3 = 29$, $u_4 = 33$,
Puisque je connais la raison et le premier terme, je peux écrire la formule explicite :
$u_n = u_0 + nr$ soit ici $u_n = 17 + 4n$
Je cherche n tel que $u_n = 253$. Je résous une équation : $253 = 17 + 4n$. On obtient $n = 59$
Pour calculer S_{38}, je dois connaître u_{38}. En remplaçant, on obtient $u_{38} = 169$
$S_{38} = (17 + 169) \times 39 / 2$ soit alors $S_{38} = 3627$

Exercice 2 : *technique de base* / 3 pts

(u_n) est une suite géométrique de raison *3* et de premier terme $u_0 = 5$

e) Calculer les trois premiers termes de la suite.
f) Donner la formule explicite de la suite (u_n).
g) Donner la formule de S_n puis calculer la valeur exacte de S_{12}

Correction :

a) On utilise la définition d'une suite géométrique. $u_1 = 15$ puis $u_2 = 45$ puis $u_3 = 135$ même si le calcul de u_3 est inutile.
b) Puisqu'il s'agit d'une suite géométrique, on a sans problème $u_n = 5 \times 3^n$
c) On écrit la formule générale $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. On remplace alors par les valeurs de l'énoncé. $S_{12} = 5\frac{1-3^{13}}{1-3}$ soit alors $S_{12} = 3985805$

Exercice 3 : *fait en classe…* / 2 pts

Calculer la somme suivante : $S_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 730$

Correction :

On reconnaît les premiers termes d'une suite arithmétique de raison *3* et de premier terme $u_0 = 1$. On écrit la formule explicite $u_n = 1 + 3n$
On cherche n afin que $u_n = 730$ soit en résolvant $1 + 3n = 730$ soit $n = 243$
On écrit alors la formule de la somme $S_n = (u_0 + u_n)\frac{n+1}{2}$
On a ici : $S_{243} = (1 + 730)\frac{244}{2}$ soit alors $S_{243} = 89182$

Exercice 4 : *Suite arithmético-géométrique* / 5 pts

On donne une suite définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}7u_n - 15 \\ u_0 = 5 \end{cases}$

On donne une suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 50$

1) Montrer que (v_n) est géométrique.
2) Donner l'expression de (v_n) en fonction de n.
3) En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.

Correction :

1) Pour montrer que (v_n) est géométrique, on utilise la technique vue en classe :
   $v_{n+1} = u_{n+1} + 50$
   $v_{n+1} = 0{,}7u_n - 15 + 50$
   $v_{n+1} = 0{,}7u_n + 35$
   $v_{n+1} = 0{,}7(u_n + 50)$ On a donc $v_{n+1} = 0{,}7v_n$
   (v_n) est géométrique de raison 0,7
2) On évalue alors le premier terme : $v_0 = u_0 + 50$ soit donc $v_0 = 55$
   On a donc la formule explicite de la suite (v_n) avec $v_n = 55 \times 0{,}7^n$
3) On inverse l'égalité : $v_n = u_n + 50$ devient $u_n = v_n - 50$
   $u_n = 55 \times 0{,}7^n - 50$

Exercice 5 : *Problème classique* / 7 pts

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A :

Une étude sur cette population a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année. Au 1er janvier 2004, la population est estimée à 25 000 singes.
On modélise la population au 1er janvier de chaque année à l'aide d'une suite. Pour tout entier naturel n, le terme u_n représente le nombre de singes au 1er janvier 2004 + n.
Ainsi $u_0 = 25000$

1) Justifier par une phrase que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 25000 \times 0{,}85^n$
2) Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5000.

Partie B :

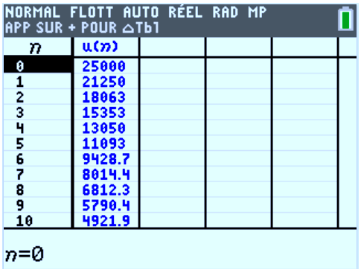
Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population ne comportait plus que 5000 individus.
A partir de cette date, on estime que chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances. On modélise la population à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme w_n représente le nombre de singes au 1er janvier 2014 + n.
Ainsi $w_0 = 5000$

1) Justifier à l'aide d'une phrase que, pour tout entier naturel n, on a :
   $w_{n+1} = 0{,}75w_n + 400$
2) On considère la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = w_n - 1600$
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3) Donner la formule explicite de (v_n)
4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $w_n = 1600 + 3400 \times 0{,}75^n$
5) Montrer que la suite (w_n) est décroissante.
6) On estime que le seuil critique pour une espèce est de 1650 individus. Déterminer en quelle année ce seuil sera atteint pour cette population de singes. On devra bien évidemment utiliser l'algorithme ci-dessous qui est à compléter.

Partie A :

1) On passe d'une année à l'autre en multipliant par le coefficient $\left(1-\frac{15}{100}\right)=0{,}85$
Il s'agit donc d'une suite géométrique de premier terme 25000.
On a donc pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 25000 \times 0{,}85^n$

Au bout de 10 ans, il y aura moins de 5000 singes



n	$u(n)$
0	25000
1	21250
2	18063
3	15353
4	13050
5	11093
6	9428.7
7	8014.4
8	6812.3
9	5790.4
10	4921.9

n=0

Partie B :

1) On passe d'une année à l'autre en multipliant par $\left(1-\frac{25}{100}\right)=0{,}75$ et en rajoutant 400 individus. On a donc $w_{n+1}=0{,}75w_n+400$
2) Pour montrer que (v_n) est géométrique, on utilise la technique vue en classe :
$v_{n+1}=w_{n+1}-1600$
$v_{n+1}=0{,}75w_n+400-1600$
$v_{n+1}=0{,}75w_n-1200$
$v_{n+1}=0{,}75(w_n-1600)$ On a donc $v_{n+1}=0{,}75v_n$
(v_n) est géométrique de raison 0,75
3) On évalue alors le premier terme : $v_0=w_0-1600$ soit donc $v_0=3400$
On a donc la formule explicite de la suite (v_n) avec $v_n=3400\times 0{,}75^n$
4) On inverse l'égalité : $v_n=w_n-1600$ devient $w_n=v_n+1600$
$w_n=3400\times 0{,}75^n+1600$
5) On évalue la différence $w_{n+1}-w_n=0{,}75w_n+400-w_n$
Soit $w_{n+1}-w_n=-0{,}25w_n+400$
$w_{n+1}-w_n=-0{,}25(3400\times 0{,}75^n+1600)+400$
$w_{n+1}-w_n=-850\times 0{,}75^n$ la suite (w_n) est décroissante.

```python
def singes():
    n = 0
    w = 5000
    while w >= 1650:
        w = 0.75*w+400
        n = n + 1
    return n+2014
```

soit

```
> singes()
2029
```

Trop d'élèves rentrent la Formule explicite, ce qui induit un nombre de boucles trop grand car l'ordre des lignes est fixé ici : Formule de Récurrence !!!!!