Correction Évaluation sur utilisation des matrices

Exercice 1 : *Exercice de cours* / 7 pts

On donne la suite de matrices colonnes (U_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = A \times U_n + B$.

On a $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'état stable noté U
2. Montrer que la suite définie par $V_n = U_n - U$ est une suite géométrique.
3. Donner l'expression de V_n en fonction de n.
4. On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ -n0{,}5^n & 0{,}5^n \end{pmatrix}$. Donner alors l'expression de U_n
5. Déterminer la limite de (U_n).

Correction :

1. $U = A \times U + B \Leftrightarrow U - A \times U = B \Leftrightarrow (I_2 - A)U = B \Leftrightarrow U = (I_2 - A)^{-1}B$

   En utilisant la calculatrice, on détermine l'inverse puis on obtient $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. $V_{n+1} = U_{n+1} - U = A \times U_n + B - U = A \times U_n + B - (A \times U + B)$

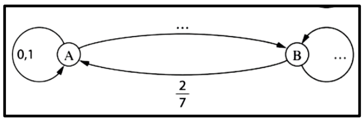
   On a : $V_{n+1} = A(U_n - U)$ soit donc $V_{n+1} = AV_n. (V_n)$ est géométrique de raison A.
3. On a alors $V_n = A^n V_0$. On évalue $V_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ soit $V_n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ -n0{,}5^n & 0{,}5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
4. On inverse alors l'égalité pour obtenir : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = V_n + U$

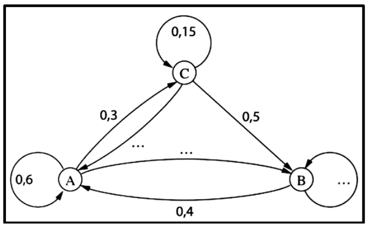
   $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} -3 \times 0{,}5^n + 4 \\ 3n \times 0{,}5^n + 4 \times 0{,}5^n - 2 \end{pmatrix}$
5. On détermine la limite des deux coefficients de la matrice colonne U_n.

   Au final, on a : $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : / 4 pts

On donne les deux graphes probabilistes ci-contre.
Compléter ces graphes et donner sur votre feuille la matrice de transition.





Correction :

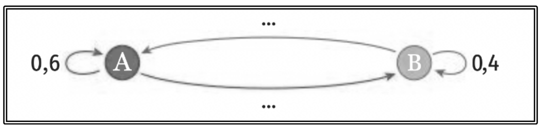
On note A la matrice du premier graphe et B la matrice du second graphe.

$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}5 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

Pour rappel, la somme des lignes de chaque matrice doit faire 1

Exercice 3 : / 5 pts

On considère le graphe probabiliste ci-contre.



1) Compléter le graphe ci-dessus.
2) Écrire sa matrice de transition.
3) Montrer que $\pi = (0{,}6 \quad 0{,}4)$ est une distribution invariante de la chaîne de Markov associée en résolvant un système.

Correction :

1) On complète aisément le graphe.
2) On a $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$
3) On résout $\pi = \pi \times P$ soit alors $(x \quad y) = (x \quad y) \times \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.En écrivant sous forme d'un système, on a : $\begin{cases} -0{,}4x + 0{,}6y = 0 \\ 0{,}4x - 0{,}6y = 0 \end{cases}$. Les deux équations sont équivalentes.

Avec la contrainte $x + y = 1$, on doit résoudre $\begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases}$.

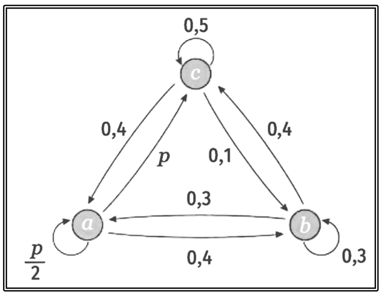
Avec une substitution simple, on a : $\begin{cases} x = 1 - y \\ 4(1 - y) - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$

Puisque la matrice P ne contient pas de 0, les distributions de probabilités convergent vers cette distribution invariante.

Exercice 4 : / 4 pts

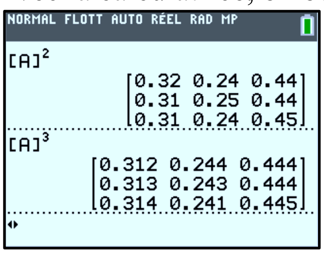
Le graphe probabiliste ci-contre représente une chaîne de Markov.

1) Déterminer la valeur de p par le calcul.
2) En déduire la matrice de transition notée P.
3) Calculer P^2 puis P^3.
4) En déduire la distribution de probabilités après 3 étapes de cette chaine de Markov pour une distribution initiale $\pi_0 = (0{,}1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}4)$



Correction :

1) Pour rappel la somme des probabilités qui partent d'un sommet fait 1.
Ainsi : $\begin{cases} \frac{p}{2} + 0{,}4 + p = 1 \\ 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1 \\ 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1 \end{cases}$. On obtient une équation en p. $1{,}5p + 0{,}4 = 1$.
On obtient ainsi la valeur $p = 0{,}4$
2) On peut alors construire la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$
3) Avec la calculatrice, on obtient



.

4) On a alors