Correction Interrogation

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Les trois exercices ci-dessous sont à traiter directement sur cette feuille.

Exercice 1 :

On donne une suite (u_n)définie par : $u_0 = 1$et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = -2u_n + 9$

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = (-2)^{n+1} + 3$

Correction :

On note $\forall n \in \mathrm{N}$ $P_n : u_n = (-2)^{n+1} + 3$

(1) Initialisation :

Lorsque $n = 0$, alors $(-2)^{0+1} + 3 = 1$donc P_0 ***est vraie, la propriété est initialisée***.

(2) Hérédité :

Je suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $P_n : u_n = (-2)^{n+1} + 3$ soit vraie.

Montrons alors que la propriété est vraie au rang $n+1$ $P_{n+1} : u_{n+1} = (-2)^{n+2} + 3$

Je sais que: $u_{n+1} = -2u_n + 9$On injecte l'hypothèse de récurrence $u_{n+1} = -2\left[(-2)^{n+1} + 3\right] + 9$

On développe alors l'expression $u_{n+1} = (-2)^{n+2} - 6 + 9$

Ainsi, $u_{n+1} = (-2)^{n+2} + 3$D'où P_{n+1} ***est vraie, la propriété est héréditaire***.

(3) Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = (-2)^{n+1} + 3$

Exercice 2 :

Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ est divisible par 3.

Correction :

Il faut d'abord être capable de traduire l'énoncé. La propriété est plus maniable si l'on écrit :
$\forall n \in \mathrm{N}$, $\exists k \in Z$ $n^3 - n = 3k$ notons que le k peut varier pour chaque n.

(1) Initialisation :

Lorsque $n = 0$, alors $0^3 - 0 = 3 \times 0$donc P_0 ***est vraie, la propriété est initialisée***.

(2) Hérédité :

Je suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $P_n : n^3 - n = 3k$ soit vraie.

Montrons alors que la propriété est vraie au rang $n+1$ $P_{n+1} : (n+1)^3 - (n+1) = 3k'$

$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n$

On injecte l'hypothèse de récurrence : $(n+1)^3 - (n+1) = (3k+n) + 3n^2 + 2n$

On développe et on factorise par 3 : $(n+1)^3 - (n+1) = 3(n^2 + n + k)$

Ainsi, $(n+1)^3 - (n+1) = 3k'$D'où P_{n+1} ***est vraie, la propriété est héréditaire***.

(3) Conclusion

$\forall n \in \mathrm{N}$ $P_n : n^3 - n$ est un multiple de 3

Exercice 3 :

On donne une suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = \sqrt{4+u_n^2}$

1) Calculer les valeurs exactes des 4 premiers termes.
2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Correction :

1) On calcule les premiers termes de la suite en utilisant les valeurs exactes.
   $u_0 = 0$ puis $u_1 = 2$ puis $u_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ puis $u_3 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ puis $u_4 = \sqrt{16} = 2\sqrt{4} = 4$
2) On peut donc conjecturer que, $\forall n \in \mathrm{N} \;\; u_n = 2\sqrt{n}$
   Cette conjecture s'appuie sur l'observation des 4 premiers termes calculés.
3) On se propose de le démontrer par récurrence.

On note $\forall n \in \mathrm{N} \;\; P_n : u_n = 2\sqrt{n}$

(1) Initialisation :

Lorsque $n = 0$, alors $2\sqrt{0} = 0$ donc P_0 ***est vraie, la propriété est initialisée***.

(2) Hérédité :

Je suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $P_n : u_n = 2\sqrt{n}$ soit vraie.

Montrons alors que la propriété est vraie au rang $n+1$ $P_{n+1} : u_{n+1} = 2\sqrt{n+1}$

Je sais que: $u_{n+1} = \sqrt{4+u_n^2}$

On injecte l'hypothèse de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{4+(2\sqrt{n})^2}$

On développe alors l'expression $u_{n+1} = \sqrt{4+4n}$

Ainsi, $u_{n+1} = 2\sqrt{1+n}$ D'où P_{n+1} ***est vraie, la propriété est héréditaire***.

(3) Conclusion

On note $\forall n \in \mathrm{N} \;\; P_n : u_n = 2\sqrt{n}$