CORRECTION EVALUATION SUR LE LN

NOM : …………………………………… PRENOM :……………………… SUJET E

Exercice 1: / 3 pts

Exprimer en fonction de $\ln 2$ ou de $\ln 3$

- $A = \ln 8$
- $A = \ln 2^3$
- $A = 3\ln 2$
- $B = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$
- $B = \ln\left(\frac{1}{2^4}\right)$
- $B = -4\ln 2$
- $C = \ln 81 - \ln 27$
- $C = \ln 3^4 - \ln 3^3$
- $C = \ln 3$
- $D = \ln\left(9\sqrt{3}\right)$
- $D = \ln\left(3^{2,5}\right)$
- $D = 2,5\ln\left(3\right)$
- $E = \ln\left(2e^2\right)$
- $E = \ln 2 + \ln\left(e^2\right)$
- $E = 2 + \ln\left(2\right)$
- $F = 5\ln 9 + 3\ln\left(\frac{1}{9}\right)$
- $F = 5\ln 3^2 - 3\ln\left(3^2\right)$
- $F = 4\ln 3$

Exercice 2 : / 3 pts

Déterminer le domaine de définition des fonctions ci dessous.

- $f(x) = \frac{3-2\ln(x)}{\sqrt{1-5x}}$
- $g(x) = \ln(-x^2 + 10x - 9)$

Correction

f existe si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ 1-5x \geq 0 \\ 1-5x \neq 0 \end{cases}$

Soit alors $x < \frac{1}{5}$ et $x > 0$. donc $D_f = \left]0;\frac{1}{5}\right[$

g existe *ssi* le contenu du *ln* est positif strictement soit alors : $-x^2 + 10x - 9 > 0$
On résout alors cette inéquation à l'aide du discriminant. On obtient deux racines 1et 9.
L'expression est donc positive à l'extérieure des racines d'où : $D_f =]1;9[$

Exercice 3 : / 2 pts

Simplifier l'écriture des réels suivants.

- $I = ln(0{,}32) + ln(100)$
- $J = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln\left(\frac{2}{3}\right) + ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + ln\left(\frac{49}{50}\right)$

Correction :

- $I = \ln 0{,}32 + \ln 100$
- $I = \ln 32$
- $I = 5\ln 2$
- $J = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$
- $J = \ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\times\dots\times\left(\frac{49}{50}\right)\right]$
- $J = \ln\left(\frac{1}{50}\right)$

Exercice 4 /2 pts

Dériver les fonctions suivantes en appliquant la bonne formule

- $i(x) = \ln(20-5x)$
- $k(x) = x^3 \ln(1+3x)$

Correction :

- $i(x) = \ln(20-5x)$

i est dérivable sur $]-\infty;4[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $]-\infty;4[$.

Donc : $i'(x) = \dfrac{-5}{20-5x}$

- $k(x) = x^3 \ln(1+3x)$

k est dérivable sur $\left]\dfrac{-1}{3};+\infty\right[$ en tant que produit et composées de fonctions dérivables sur $\left]\dfrac{-1}{3};+\infty\right[$.

On a : $k'(x) = x^3 \times \dfrac{3}{1+3x} + 3x^2 \ln(1+3x)$

Exercice 5 : / 2 pts

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 1$ de la représentation graphique de la fonction $l(x) = 5x\ln x + 2$

Correction :

On dérive la fonction en remarquant qu'il s'agit d'un produit :
$l'(x) = 5\ln x + 5$ On évalue alors $l'(1) = 5$ et $l(1) = 2$ $T : y = 5(x-1)+2$
Soit alors $T : y = 5x - 3$

Exercice 6 : / 3 pts

Déterminer les limites suivantes en rédigeant votre réponse :

- $\lim\limits_{x\to 0} ln(-1+e^{-5x})$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5lnx+7}{x^2+12}$

Correction :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-5x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(-1+e^{-5x}\right) = 0$ et donc par composition, on a :
  $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(-1+e^{-5x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(X\right) = -\infty$
- On factorise l'expression $\frac{5lnx+7}{x^2+12} = \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x^2)}{x^2} \times \frac{5+\frac{7}{\ln(x)}}{1+\frac{12}{x^2}}$

  A l'aide des croissances comparées, $\lim\limits_{X\to\infty} \frac{lnX}{X} = 0$

  On obtient alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5lnx+7}{x^2+12} = 0$

Exercice 7 : / 2 pts

Résoudre l'inéquation suivante :

$$ln(3x-5) > 2ln(x-3)$$

Correction :

On étudie d'abord le domaine d'existence de l'équation. L'équation existe si les deux expressions sous le logarithme sont positives soit alors : $D_E =]3;+\infty[$

On utilise la propriété algébrique du ln afin de faire «disparaître » le 2

$$ln(3x-5) > ln[(x-3)^2]$$

Puisque le *ln* est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, on a donc :

$$(3x-5) > [(x-3)^2]$$

On développe et on réduit soit alors : $x^2 - 9x + 14 < 0$

A l'aide du discriminant, on obtient deux racines 2 et 7

On étudie alors le signe de l'expression ; elle est négative entre 2 et 7.

En recollant avec le domaine d'existence, on obtient $S =]3;7[$

Exercice 8 : / 2 pts

Résoudre l'équation suivante : (E): $ln(2x+1) + ln(x-3) = ln(x+5)$

Correction :

L'équation existe si : $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x-3>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0{,}5 \\ x>3 \\ x>-5 \end{cases}$ Le domaine d'existence est : $D_E =]3\,;+\infty[$

On peut maintenant opérer sur l'équation. En utilisant l'équation fonctionnelle, on a :

$ln(2x+1) + ln(x-3) = ln(x+5)$ se transforme en $ln[(2x+1)(x-3)] = ln(x+5)$

En supprimant le logarithme, $(2x+1)(x-3) = (x+5)$

On développe la double distributivité et on réduit : $2x^2 - 6x - 8 = 0$

On utilise le discriminant. On trouve deux racines réelles conjuguées : $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$

En collant les solutions de l'équation sur le domaine d'existence, on obtient donc : $S = \{4\}$